УДК 512.643

ПРО НАПІВСКАЛЯРНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

Р. В. Коляда, О. М. Мельник

Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

Для поліноміальної матриці $A(x)$, записаної у вигляді матричного многочлена $A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \cdots A_m$, де A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – квадратні матриці порядку n над полем F, встановлено нормальну форму відносно напівскалярної еквівалентності. Також встановлено нормальну форму відносно напівскалярної еквівалентності для випадку, коли $A(x)$ розкладається в добуток лінійних множників $A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_m)$.

Ключові слова: *поліноміальна матриця, нормальна форма, напівскалярна еквівалентність.*

Розглянемо поліноміальну матрицю $A(x)$ записану у вигляді матричного многочлена

$$A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \cdots A_m,$$

де A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – квадратні матриці порядку n над полем F.

Визначник матриці $A(x)$ має вигляд

$$\det A(x) = x^{mn} + p_1x^{mn-1} + p_2x^{mn-2} + \cdots + p_{mn}.$$

Матриця

$$L = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_{mn} & -p_{mn-1} & -p_{mn-2} & \cdots & -p_1 \end{Vmatrix}$$

називається супроводжуючою матрицею матриці $A(x)$, причому $\det A(x) = \det(Ex - L)$.

Поліноміальні квадратні матриці $A(x), B(x)$ порядку n над кільцем многочленів $M_{n,n}(F[x])$ (F – поле) називають напівскалярно еквівалентними [1], якщо існують неособлива матриця $P \in M_{n,n}(F)$ та оборотна матриця $Q(x) \in GL(n, F[x])$ такі, що $B(x) = PA(x)Q(x)$.

Для нескінченного поля F матриця $A(x) \in M_{n,n}([x])$ напівскалярно еквівалентними перетвореннями зводиться до трикутної матриці

$$T_A(x) = PA(x)Q(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_{21} & \varepsilon_2(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \cdots & \varepsilon_n(x) \end{Vmatrix},$$

де $P \in GL(n,F)$; $Q(x) \in GL(n,F[x])$, $\varepsilon_i(x)$ – інваріантні многочлени матриці $A(x)$; $\varepsilon_j(x) \big| t_{ij}(x)$ для всіх $i > j$ і $\deg t_{ij} < \deg \varepsilon_i(x)$ для всіх $1 < i \le n$ та $i > j > n$. Матриця $T_A(x)$ визначена неоднозначно.

Задача про напівскалярну еквівалентність поліноміальних матриць, встановлення їх канонічної форми відносно перетворення напівскалярної еквівалентності досліджувалася багатьма авторами [1, 3] та ін., але в загальному випадку канонічна форма не була знайдена. Канонічну форму матричної в'язки $A_0x - A_1$ над довільним полем F з неособливою матрицею відносно перетворення напівскалярної еквівалентності встановлено в роботі [3].

У даній статті розглянемо напівкалярну еквівалентність поліноміальної матриці, $A(x)$ записаної у вигляді унітального матричного многочлена степеня m порядку n, встановимо її нормальну форму відносно напівскалярної еквівалентності.

Теорема 1. Нехай унітальні многочлени $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_k(x) \in F[x]$, $\deg \varepsilon_i(x) = m_i \ge 1$ – інваріантні многочлени матриці $A(x) \in M_{n,n}[x]$. Матричний многочлен $Ex - L$ напівскалярно еквівалентними перетвореннями зводиться до клітково-діагональної $n \times n$ матриці

$$H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & \varepsilon_i(x) \end{Vmatrix} = \bigoplus_{i=1}^{r} H_{\varepsilon_i}(x),$$

тобто $H_A(x) = P(Ex - L)Q(x)$, де $P \in GL(n,F)$, $Q(x) \in GL(n,F[x])$, причому матриця $H_A(x)$ визначена з точністю до перестановки блоків $H_{\varepsilon_i}(x)$.

Доведення. Для матриці $Ex - L$ існує неособлива матриця $T \in M_{n,n}(F)$ [2], що перетворенням подібності зводить її до клітково-діагонального вигляду

$$T(Ex - L)T^{-1} = \begin{Vmatrix} E_{m_1}x - \Phi_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & E_{m_2}x - \Phi_{\varepsilon_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & E_{m_k}x - \Phi_{\varepsilon_k} \end{Vmatrix}, \quad (1)$$

де φ_{ε_i} – клітки Фробеніуса, побудовані за інваріантними многочленами $\varepsilon_i(x)$.

Матричний многочлен $Ex-L$ скалярно еквівалентний клітково-діагональній матриці (лема 2) [3]

$$U(Ex-L)V=\left\|\begin{matrix} E_{m_1}x-\Phi_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & E_{m_2}x-\Phi_{\varepsilon_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & E_{m_k}x-\Phi_{\varepsilon_k} \end{matrix}\right\|,$$

де $U,V\in M_{n,n}(F)$ – неособливі матриці.

Згідно з лемою 3 [3] матриці $\Phi_{a_i}(x)=E_{m_i}x-\Phi_{\varepsilon_i}$ і $H_{\varepsilon_i}(x)$ напівскалярно еквівалентні, тобто

$$H_{\varepsilon_i}(x)=P_i\Phi_{\varepsilon_i}(x)Q_i(x),$$

де $P_i\in GL(k_i,F),\ Q_i(x)\in GL(k_i,F[x]),\ i=1,2,\ldots,k$.

Таким чином, матриці $P=diag(P_1,P_2,\ldots,P_k)U\in GL(n,F)$ та $Q(x)=Vdiag(Q_1(x),Q_2(x),\ldots,Q_k(x))U\in GL(n,F[x])$ задовольняють рівність

$$P(Ex-L)Q(x)=H_A(x)=\bigoplus_{i=1}^{k}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & \varepsilon_i(x) \end{matrix}\right\|.$$

Матриця $H_{\varepsilon_i}(x)=\bigoplus_{i=1}^{k}H_{\varepsilon_i}(x)$ визначається однозначно з точністю до перестановки діагональних кліток $H_{\varepsilon_i}(x)$, оскільки матриця (1) визначається однозначно. Теорему доведено.

Наслідок 1. Поліноміальна матриця $A(x)\in M_{n,n}(F[x])$ напівскалярно еквівалентна клітково-діагональній $(n\times n)$ – матриці

$$H_A(x)=\bigoplus_{i=1}^{k}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & \varepsilon_i(x) \end{matrix}\right\|,$$

де $\varepsilon_1(x),\varepsilon_2(x),\ldots,\varepsilon_k(x)\in F[x]$, $\deg\varepsilon_i(x)=m_i\geq 1$,– інваріантні многочлени $A(x)$, причому матриця $H_A(x)$ перетвореннями напівскалярної еквівалентності визначена однозначно з точністю до перестановки блоків $H_{\varepsilon_i}(x)$.

Наслідок 2. Поліноміальні матриці $A_1(x)$ і $A_2(x)$ напівскалярно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $A_1(x)$ і $A_2(x)$ еквівалентні.

Теорема 2. Нехай унітальні многочлени $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x) \in F[x]$ ($\deg h_i(x) = m_i \geq 1$) є елементарними дільниками матриці $A(x) \in M_{n,n}[x]$. Матричний многочлен $Ex - L$ напівскалярно еквівалентними перетвореннями зводиться до клітково-діагональної $n \times n$ матриці

$$D_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & h_i(x) \end{Vmatrix} = \bigoplus_{i=1}^{r} D_{h_i}(x),$$

тобто $D_A(x) = P(Ex - L)Q(x)$, де $P \in GL(n, F)$, $Q(x) \in GL(n, F[x])$, причому матриця $D_A(x)$ визначена з точністю до перестановки блоків $D_{\varepsilon_i}(x)$.

Доведення теореми аналогічне до доведення теореми 1.

Нехай поліноміальна матриця $A(x)$ розкладається в добуток лінійних множників $A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_m)$.

Розглянемо матриці

$$L_1 = \begin{Vmatrix} 0 & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E \\ -A_m & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \cdots & -A_1 \end{Vmatrix} \text{ і } B = \begin{Vmatrix} B_m & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{m-1} & E & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_1 \end{Vmatrix},$$

$\det(Ex - L_1) = \det(Ex - B)$, причому матриці L_1 і B подібні, тобто існує неособлива матриця P, що $B = PL_1P^{-1}$.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 3. Нехай унітальні многочлени $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_k(x) \in F[x]$, ($\deg \varepsilon_i(x) = m_i \geq 1$) – інваріантні многочлени матриці $A(x) \in M_{n,n}[x]$. Матричний многочлен $Ex - B$ напівскалярно еквівалентними перетвореннями зводиться до клітково-діагональної $n \times n$ матриці

$$H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & \varepsilon_i(x) \end{Vmatrix} = \bigoplus_{i=1}^{r} H_{\varepsilon_i}(x),$$

тобто $H_A(x) = P(Ex - B)Q(x)$, де $P \in GL(n, F)$, $Q(x) \in GL(n, F[x])$, причому матриця $H_A(x)$ визначена з точністю до перестановки блоків $H_{\varepsilon_i}(x)$.

Теорема 4. Нехай унітальні многочлени $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x) \in F[x]$, ($\deg h_i(x) = m_i \geq 1$) – елементарні дільники матриці $A(x) \in M_{n,n}[x]$. Матричний многочлен $Ex - B$ напівскалярно еквівалентними перетвореннями зводиться до клітково-діагональної $n \times n$ матриці

$$D_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & h_i(x) \end{matrix} \right\| = \bigoplus_{i=1}^{r} D_{h_i}(x),$$

тобто $D_A(x) = P(Ex - B)Q(x)$, де $P \in GL(n, F)$, $Q(x) \in GL(n, F[x])$, причому матриця $D_A(x)$ визначена з точністю до перестановки блоків $D_{\varepsilon_i}(x)$.

Доведення теорем 3 і 4 аналогічні до доведення теорем 1 і 2 відповідно, з урахуванням того, що матриці L_1 і B подібні. Отримані результати можуть бути застосовані в теорії лінійних систем при обчисленні власних значень матриць.

Список використаних джерел

1. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники / П. С. Казімірський. − Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
2. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. – Москва: Наука, 1982. – 272 с.
3. Прокіп В. М. Канонічна форма відносно напівскалярної еквівалентності матричної в›язки з невиродженою першою матрицею / В. М. Прокіп // Укр. мат. журн. – 2011. − **63**, № 8. – С. 1435−1440.

References

1. Kazimirskij P. (1981). Rozklad matrychnykh mnogochleniv na mnozhnyky. – Kyjiv: Nauk. dumka– 224 p. (in Ukrainian)
2. Lankaster P. (1969). Theory of matrices. – New York: Acad. Press– 326 p. (in Russian)
3. Prokip V. M. (2011). Canonical form with respect to semiscalar equivalence for a matrix pencil with nonsingular first matrix // Ukr. Math. J. –− 63, No 8. – P. 1314–1320. (in Ukrainian)

ON THE SEMISCALAR EQUIVALENCE OF POLYNOMIAL MATRICES

R. V. Kolyada, O. M. Melnyk
Ukrainian Academy of Printing
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
rostyslavakolyada@gmail.com, melnykorest@gmail.com

For a polynomial matrix written as a matrix polynomial $A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \cdots A_m$ *where* A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *is a square matrix of n-order over F field, we find a normal form with respect to semiscalar equivalence. Moreover, we find a normal form with respect to semiscalar equivalence in case when may be decomposed as a product of linear factors* $A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_m)$.

Keywords: *polynomial matrix, normal form, semiscalar equivalence.*

Стаття надійшла до редакції 12.09.2016.
Received 12.09.2016