УДК 517.11

АНАЛІЗ ВПОРЯДКОВАНОСТІ ЗНАЧЕНЬ У ФОРМУЛІ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Овсяк В.К.[1], Овсяк О.В.[2], Петрушка Ю.В.[3]

[1]*Українська академія друкарства,*
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна
ovsyak@rambler.ru

[2]*Київський національний університет культури і мистецтв,*
вул. Чигоріна, 20, Київ, 01601, Україна
ovsjak@ukr.net

[3]*Національний університет «Львівська політехніка»,*
вул. Степана Бандери, 12, Львів, 79000, Україна
julja-petrushka@rambler.ru

Проаналізовано аксіому математичної індукції, яка подана формулою математичної логіки. Встановлено, що відома формула математичної індукції викошується тільки у випадку наявності впорядкованих значень зв›язаної квантором змінної. При цьому впорядкованість не є описаною аналітично. Застосовано алгебру алгоритмів для аналітичного опису впорядкованості. Описано аксіому математичної індукції формулою алгебри алгоритмів.

Ключові слова: *формула аксіоми математичної індукції, істинність, позиції, впорядкування значень змінної.*

Доведення математичних тверджень виконується застосуванням метода математичної індукції. Відомі формулювання математичної індукції у вигляді принципу і аксіоми, яка описана математичною логікою. З метою вияснення вимог, які ставляться до коректного застосування метода математичної індукції, необхідно виконати його аналіз. На підставі алгебри алгоритмів описати аксіому індукції у вигляді формули алгебри алгоритмів.

Принцип і формула математичної індукції. Загально відомий принцип математичної індукції, який застосовується для доведення математичних тверджень та у текстовій формі має таке формулювання «Твердження $F(x)$, залежне від натурального параметра x, вважається доведеним, якщо доведено $F(1)$ і для будь-якого натурального n з допущення, що вірно $F(n)$, виведено, що вірно також $F(n + 1)$» [1].

Також відоме подання принципу математичної індукції у вигляді формули математичної логіки [2]. Формула (аксіома) математичної індукції ([2], стр. 325) має такий вигляд:

$$F(a) \mathbin{\&} \forall x\, [F(x) \to F(x')] \to F(b).$$

У цій формулі a є початковим значенням змінної x, яка є зв'язаною квантором загальності, тоді як змінна b є вільною, тобто незв'язаною кванторними операціями змінною. Обидві змінні набувають значень із однієї і тієї ж самої множини.

Покажемо, що впорядкування значень множини, які набувають зв'язана змінна x і незв'язана змінна b формули $F(x)$, для математичної індукції має фундаментальне значення.

Якщо у формулі математичної індукції операцію імплікації ($\rightarrow$) замінимо операціями диз'юнкції ($\vee$) та інвертування ($\neg$), а кванторну операцію «для всіх» ($\forall$) – кванторною операцією «існування» ($\exists$), то отримаємо вираз

$$\neg F(a) \vee \exists x\, [F(x)\ \&\ \neg F(x')] \vee F(b). \tag{1}$$

Аналіз значень незв'язаної змінної. Нехай змінна x набуває значень із множини $Q = \{0, 1, 2, 3\}$. Розглянемо два випадки. Випадок перший: коли змінна x набуває тільки значень 0, 1, 2 і незв'язана кванторними операціями змінна b має будь-яке із цих значень, нехай то буде значення 2. Для цих значень змінних із формули (1) отримуємо вираз

$$\neg F(0) \vee [F(0)\ \&\ \neg F(1) \vee F(1)\ \&\ \neg F(2)] \vee F(2).$$

Задавши усі можливі значення істинності $F(0)$, $F(1)$ і $F(2)$ можна впевнитися у тому, що отримана формула є тотожно істинною (див. таблиці 1).

Таблиця 1

N	$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$	$\neg F(0) \vee [F(0)\ \&\ \neg F(1) \vee F(1)\ \&\ \neg F(2)] \vee F(2)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Випадок другий: коли змінна x набуває теж тільки значення 0, 1, 2, а незв'язана кванторними операціями змінна b має значення 3. У такому разі із формули (1) маємо

$$\neg F(0) \vee [F(0)\ \&\ \neg F(1) \vee F(1)\ \&\ \neg F(2)] \vee F(3).$$

Тепер задавши усі можливі значення істинності $F(0)$, $F(1)$ і $F(2)$ та $F(3)$ можна впевнитися у тому, що отримана формула уже не є тотожно істинною (див. табл. 2). Зокрема для значень істинності $F(0) = 1$, $F(1) = 1$ і $F(2) = 1$ та $F(3) = 0$ вона має значення істинності 0. Тоді як для усіх інших можливих значень істинності формула має значення істинності 1.

Таблиця 2

N	$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$	$F(3)$	$\neg F(0) \vee [\mathrm{F}(0) \,\&\, \neg F(1) \vee F(1) \,\&\, \neg F(2)] \vee F(3)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

Аналогічна останньому випадку можна переконатися (див. табл. 3), що формула

$$\neg F(0) \vee [F(0) \,\&\, \neg F(2) \vee F(2) \,\&\, \neg F(3)] \vee F(1)$$

не є тотожно істинною, так як для наборів значень істинності $F(0) = 1$, $F(1) = 0$, $F(2) = 1$, $F(3) = 1$ і $F(0) = 1$, $F(1) = 1$, $F(2) = 1$, $F(3) = 1$ вона набуває значення 0.

Таблиця 3

N	$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$	$F(3)$	$\neg F(0) \vee [F(0) \,\&\, \neg F(2) \vee F(2) \,\&\, \neg F(3)] \vee F(1)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

На підставі виконаного аналізу можна зробити такий висновок: незв'язана змінна математичної індукції може набувати тільки тих значень, які набула зв›язана змінна. Іншими словами – твердження $F(x)$, виконання якого доведено для початкового значення змінної, а з допущення його виконання для будь-якого n встановлено його виконання і для $n + 1$, виконується тільки для будь-яких значень змінної від 0 до $n + 1$.

Зміна початкового значення. Встановимо чи впливає зміна початкового значення на формулу індукції. У попередньому розділі початковим значенням було значення 0. Нехай тепер початковим значенням є 1, а не 0. Тоді із формули (1), для змінної x, яка набуває значень із множини $Q = \{0, 1, 2, 3\}$ і незв'язаної кванторною операцією змінної $b = 3$, отримуємо вираз

$$\neg F(1) \vee [F(1) \,\&\, \neg F(2) \vee F(2) \,\&\, \neg F(3) \vee F(3) \,\&\, \neg F(0)] \vee F(3).$$

Його значення істинності для усіх можливих значень істинності $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$ та $F(3)$ наведено у табл. 4. Вираз набуває значення істинності тільки істинно. Отже він є тотожно істинною формулою.

Таблиця 4

N	$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$	$F(3)$	$\neg F(1) \vee [F(1) \,\&\, \neg F(2) \vee F(2) \,\&\, \neg F(3) \vee F(3) \,\&\, \neg F(0)] \vee F(3)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Можна зробити висновок, що формула математичної індукції не залежить від того яке значення змінної буде вибране як початкове значення.

Аналіз впливу впорядкованості значень змінної. У даному разі можливі два випадки. Випадок перший – впорядкованість значень змінної, яка виражена у самих цих значеннях змінної. У другому випадку впорядкованість значень змінних задана спеціальними засобами. Цими засобами може бути, наприклад, традиційне застосування дужок або інших методів, якими є теорії алгоритмів.

1. Впорядкованість значень змінної самими значеннями

У формулі математичної індукції (1) цей тип впорядкованості виражений через x та x'. Розгляньмо приклад. Нехай змінна x набуває значень 0, 1, 2 і 3. Тоді x' має значення 1, 2 і 3. У такому разі для цих значень зв'язаної змінної x

та незв'язаної змінної *b*, допустимо значенням якої є 2, формула (1) перетворюється у такий вираз

$$\neg F(0) \vee [F(0) \,\&\, \neg F(1) \vee F(1) \,\&\, \neg F(2) \vee F(2) \,\&\, \neg F(3)] \vee F(2).$$

Значення істинності отриманого виразу наведено у табл. 5.

Таблиця 5

N	$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$	$F(3)$	$\neg F(0) \vee [F(0) \,\&\, \neg F(1) \vee F(1) \,\&\, \neg F(2) \vee F(2) \,\&\, \neg F(3)] \vee F(2)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Як видно із табл. 5 вираз є тотожно істинною формулою. Його отримано з формули математичної індукції, яка є тотожно істинною.

Значення змінної x' може відрізнятися від x не тільки на 1, а на будь-яке значення Δ. Покажемо це на прикладі коли $\Delta = 2$. У такому разі для значення змінної $x = 0$ отримуємо по модулю 4 (є 4 значення змінної x) значення $x' = x + 2 = 2$. Для x є 1, 2 і 3 отримуємо для x' значення 3, 0 і 1, відповідно. Тоді із формули (1), для цих значень x і x' та $a = 1$, маємо вираз

$$\neg F(0) \vee [F(0) \,\&\, \neg F(2) \vee F(1) \,\&\, \neg F(3) \vee F(2) \,\&\, \neg F(0) \vee F(3) \,\&\, \neg F(1)] \vee F(1).$$

У табл. 6 наведено значення його істинності.

На підставі табл. 6 робимо висновок: коли між числовими значеннями x та x' є різниця більша за 1 то формула математичної індукції не є тотожно істинною. Тобто впорядкування значень зв'язаної змінної має першочергове значення. Якщо впорядкування значень змінної порушується то принцип математичної індукції не може бути застосовано.

Таблиця 6

N	$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$	$F(3)$	$\neg F(0) \vee [F(0) \,\&\, \neg F(2) \vee F(1) \,\&\, \neg F(3) \vee F(2) \,\&\, \neg F(0) \vee F(3) \,\&\, \neg F(1)] \vee F(1)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Неважко переконатися у тому, що формула математичної індукції також не є тотожно істинною у випадку однакових значень *x* та *x'*.

2. Впорядкування значень засобами алгебри алгоритмів

Як це було показано у пункті 1, для значень 0, 1, 2 і 3 змінної *x* та значень 1, 2 і 3 змінної *x*', що кожне наступне значення змінної х на 1 більше за попереднє. Аналогічно впорядковані значення змінної *x*'. Крім того, кожне значення змінної *x*' є наступним значенням змінної х. Зв'язана кванторною операцією змінна х послідовно, без пропусків, набуває усіх значень від початкового до кінцевого. Тобто значення зв'язаної квантором змінної мусять бути впорядкованими, як і значення *x*'.

Застосуємо для впорядкування значень, яких набуває зв'язана кванторною операцією змінна х, засоби алгебри алгоритмів [3, 4, 5]. Нехай зв'язана змінна х послідовно набуває значення *c*, *d*, *e*, *k*, ... Впорядкувавши їх операцією секвентування [3, 4, 5] отримуємо вираз

$$\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{c; d}; e}; k}; \ldots$$

У ньому значення с у першому знизу вкладеному секвентуванні має позицію α, тоді як значення *d* знаходиться на позиції β. Ці позиції запишемо для *c* і *d* у вигляді індексів: c_α та d_β Друге знизу секвентування надає першому знизу секвентуванню позицію α та позицію β значенню *e*, яке з позицією має вигляд e_β. Останнім секвентуванням другому знизу секвентуванню надається позиція α і значенню *k* – позиція β, що дає k_β. Якщо внести позицію α, яка надана першому секвентуванню другим секвентуванням, у перше секвентування тоді c_α та d_β матимуть позиції $c_{\alpha,\alpha}$ та $d_{\beta,\alpha}$.

Аналогічно внесення позиції α, яка надана третім секвентуванням, у перше та друге секвентування отримуємо такі позиції $c_{\alpha,\alpha,\alpha}$, $d_{\beta,\alpha,\alpha}$ і $e_{\beta,\alpha}$.

Врахувавши позиції початкового значення а (a_α), зв'язаної змінної х (x_α), x' (x_β) і незв'язаної змінної b (b_γ), яка набуває будь-яке із значень $c_{\alpha,\alpha,\alpha}$, $d_{\beta,\alpha,\alpha}$, $e_{\beta,\alpha}$ і k_β, а також замінивши операції диз'юнкції операцією паралелення, кон'юнкції – секвентуванням та кванторну операцію існування – операцією циклічного паралелення (∅), формула (1) матиме вигляд

$$\neg F(a_\alpha), \emptyset x_{\alpha,\beta} \overparen{F(x_\alpha), \neg F(x_\beta)}, F(b_\gamma). \quad (2)$$

Розгляньмо значення істинності формули (2) на прикладі скінченої секвентної області значень [3, 4, 5]

$$\overparen{c; d; e; k; \ldots.}$$

У такому разі операцію циклічного паралелення [3, 4, 5]

$$\emptyset x_{\alpha,\beta} \overparen{F(x_\alpha), \neg F(x_\beta)}$$

можна замінити операцією паралелення

$$\overparen{F(c_\alpha), \neg F(d_\beta)}, \overparen{F(d_{\beta,\alpha}), \neg F(e_\beta)}, \overparen{F(e_{\beta,\alpha}), \neg F(k_\beta)}.$$

Виконавши підстановку отриманої формули у формулу (2) і замінивши a_α на c_α та b_γ одним із можливих його значень, наприклад, k_β, маємо

$$\neg F(c_\alpha), \overparen{F(c_\alpha), \neg F(d_\beta)}, \overparen{F(d_{\beta,\alpha}), \neg F(e_\beta)}, \overparen{F(e_{\beta,\alpha}), \neg F(k_\beta)}, F(k_\beta).$$

У табл. 7 наведено значення істинності отриманої формули.

Таблиця 7

N	$F(c_\alpha)$	$F(d_\beta)$, $F(d_{\beta,\alpha})$	$F(e_\beta)$, $F(e_{\beta,\alpha})$	$F(k_\beta)$	$\neg F(c_\alpha), \overparen{F(c_\alpha), \neg F(d_\beta)}, \overparen{F(d_{\beta,\alpha}), \neg F(e_\beta)}, \overparen{F(e_{\beta,\alpha}), \neg F(k_\beta)}, F(k_\beta)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

На підставі значень істинності табл. 7 стверджуємо, що отримана формула, а також формула (2) є тотожно істинні.

У формулі (2), на підставі алгебри алгоритмів, явно описана впорядкованість значень незв'язаних і зв'язаних змінних. Відома формула математичної індукції не містить опису наявної впорядкованості значень змінних.

Висновки

1. Виконаним аналізом відомої формули математичної індукції встановлено необхідність наявності впорядкування значень зв'язаної змінної.

2. Показано, що засоби алгебри алгоритмів забезпечують аналітичний опис значень змінних.

3. Побудована аксіома математичної індукції у вигляді формули алгебри алгоритмів.

4. Встановлено, що отримана аксіома математичної індукції у вигляді формули алгебри алгоритмів є тотожно істинною.

Список використаних джерел

1. Математическая энциклопедия. Том 3. – Москва: «Советская энциклопедия», 1982. – 1183 с.
2. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – Москва: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 556 с.
3. Овсяк В.К. Засоби еквівалентних перетворень алгоритмів інформаційно-технологічних систем // Доповіді Національної академії наук України, № 9, 1996. – С.83–89.
4. Овсяк А.В. Модифицированная алгебра алгоритмов и инструментальные средства обработки формул алгебры алгоритмов / А.В. Овсяк, В.К.Овсяк // Управляющие системы и машины. – № 1, 2013. – С. 27–36.
5. Ovsyak V., Ovsyak O., Petruszka J. Analysis of Modeling methods and tools of complex computer systems and information technologies / Proceedings of the XIth International Scientific Technikal Conference CSIT 2016. 6–10 September 2016. – Lviv: Lviv Politechnic Publishing House. – P. 45–48.

References

1. (1982), «Matematicheskaya entsiklopediya», Sovetskaya entsiklopediya, Vol. 3, Moscow, (in Russian).
2. Gil'bert D., Bernays P. (1982). «Osnovaniya matematiki. Logicheskie ischisleniya i formalizatsiya arifmetiki», Moscow, «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, (in Russian).
3. Ovsjak V.K. (1996). «Zasoby ekvivalentnykh peretvorenj alghorytmiv informacijno-tekhnologhichnykh system», Dopovidi Nacionaljnoji akademiji nauk Ukrajiny, no. 3, pp. 83–89. (in Ukrainian).
4. Ovsyak A.V., Ovsyak V.K. (2013). «Modifitsirovannaya algebra algoritmov i instrumental'nye sredstva obrabotki formul algebry algoritmov», Upravlyayushchie sistemy i mashiny, no. 1, pp. 27–36. (in Ukrainian).
5. Ovsyak V., Ovsyak O., Petruszka J., (2016). «Analysis of Modeling methods and tools of complex computer systems and information technologies», Proceedings of the XIth International Scientific Technikal Conference CSIT 2016 (accessent at 6–10 September 2016), pp. 45–48.

ANALYSIS OF VALUES ORDERING IN THE FORMULA OF MATHEMATICAL INDUCTION

V.K. Ovsyak[1], O.V. Ovsyak[2], J.V. Petruszka[3]

[1]Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., L'viv, 79020, Ukraine
ovsyak@rambler.ru

[2]University of Culture and Arts,
20, Czygorina St., 01601, Kyiv, Ukraine,
ovsjak@ukr.net

[3]National University «Lviv Polytechnic»,
12, S. Bandery St., L'viv, 79000, Ukraine
julja-petrushka@rambler.ru

The axiom of mathematical induction has been analyzed, which is given by the formula of mathematical logic. It has been found out that the known formula of mathematical induction is valid only in the case of ordered values linked by a quantifier variable. This ordering is not described analytically. Algebra of algorithms has been applied for the analytical description of ordering. The axiom of mathematical induction has been described by the formula of algebra of algorithms.

Keywords: *formula of the axiom of mathematical induction, truthful formula, position, ordering of variable values.*

Стаття надійшла до редакції 12.09.2016.
Received: 12.09.2016.