УДК 621.373.54
© Л. Мороз[1]*, Ю. Голінко*[1]*, 2009*

АПРОКСИМАЦІЯ АРКТАНГЕНСА

Розроблено різні способи знаходження значення функції арктангенса в обчислювальній техніці. . На основі відомих формул апроксимації запропоновано власні формули, що характеризуються вищою точністю.

In the article the different methods of finding of value of function of arctangent are considered in the computing engineering. On the basis of the known formulas of approximation own formulas which are characterized by higher exactness are offered.

1. ВСТУП

Обчислення функції арктангенса широко використовується в обчислювальній техніці, радіозв'язку, комп'ютерній графіці, зокрема при побудові зображень [17], або в комп'ютерних іграх[12]. Тому існує проблема точності і швидкості обчислення даної функції. Існують такі наближені способи обчислення арктангенса: поліноміальна апроксимація, мінімаксна апроксимація, наближення рядом Тейлора, апроксимація Паде, наближення поліномом Чебишева, табличний метод, а також CORDIC (COrdinate Rotation DIgital Computer) метод.

Для забезпечення високої продуктивності при розробці програмного забезпечення досить хорошим способом є наближення багаточленними і раціональними функціями. Зазвичай раціональні апроксимації дозволяють досягнути більшої точності, ніж багаточленні апроксимації. Але при їх реалізації необхідно виконувати операцію ділення, яка у більшості процесорів виконується значно повільніше, ніж операція множення.

[1] Національний університет «Львівська політехніка»

2. МЕТА РОБОТИ

Метою даної роботи є дослідження похибок, які виникають при обчисленні арктангенса вище переліченими способами, а також знаходження формул, які давали б менші похибки апроксимації.

3. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Обчислення арктангенса розбивають на декілька етапів для звуження діапазону обчислень. При обчисленні функції $y = \arctan(x)$ на проміжку $[0;2\pi]$, його розбивають на вісім частин(октантів), як показано на рис. 1. допомогою цього розбиття і властивостей арктангенса, таких як:

$$\arctan(x) = -\arctan(-x),$$

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x}), \text{ якщо } x > 1,$$

обчислення функції $y = \arctan(x)$ на всьому проміжку, зводиться до обчислення її значення в першому октанті.

Слід розрізняти функції $y = \arctan(x)$ та $y = \arctan 2(y, x) = \arctan(\frac{y}{x})$ [4].

$$x = \frac{|Q|}{|I|}, \quad y = \frac{|I|}{|Q|}$$

$$\arctan 2(I,Q) = \begin{cases} f(x), I + jQ \in I \\ \frac{\pi}{2} - f(y), I + jQ \in II \\ \frac{\pi}{2} + f(y), I + jQ \in III \\ \pi - f(x), I + jQ \in IV \\ -\pi + f(x), I + jQ \in V \\ -\frac{\pi}{2} - f(y), I + jQ \in VI \\ -\frac{\pi}{2} + f(y), I + jQ \in VII \\ -f(x), I + jQ \in VIII \end{cases}$$

Апроксимуючі функції Паде

Ланцюговий дріб для арктангенса має вигляд[1]:

$$\arctan(x) = x\cfrac{1}{1+\cfrac{x^2/(1\cdot 3)}{1+\cfrac{2^2x^2/(3\cdot 5)}{1+\cfrac{3^2x^2/(5\cdot 7)}{1+\ldots}}}}$$

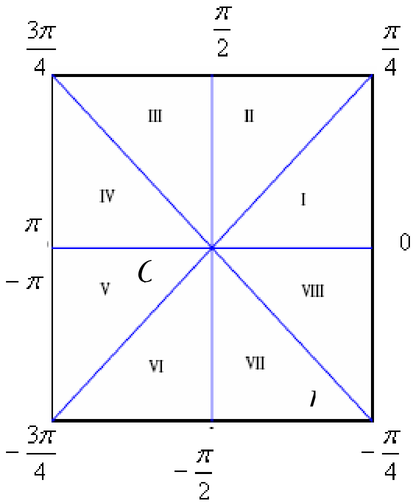

Рис. 1. Розбиття на октанти

Апроксимуюча функція Паде є раціональною функцією $R_k = P_k / Q_k$, де многочлени P_k і Q_k визначаються потрійною рекурсією

$$P_{k+1} = P_k + P_{k-1}\frac{k^2x^2}{4k^2-1}$$

$$Q_{k+1} = Q_k + Q_{k-1}\frac{k^2x^2}{4k^2-1}$$

з $P_0 = 0, P_1 = x, Q_0 = 1, Q_1 = 1$. Для прикладу наведемо кілька перших апроксимуючих функцій [1]:

$$R_1 = x$$

$$R_2 = \frac{3x}{3+x^2}$$

$$R_3 = \frac{15x + 4x^3}{15 + 15x^2}$$

$$R_4 = \frac{105x + 55x^3}{105 + 90x^2 + 9x^4}$$

Похибки наближень перших шести функцій подано в додатку 1.

Лінійна апроксимація

Лінійна апроксимація дає змогу наближати арктангенс прямими [4]

$$y = \frac{\pi}{4}x\,,$$

$$y = 0.035550873 + \frac{\pi}{4}x$$

Лінійна апроксимація [4] на проміжку $x \in [0;1]$ не дає досить точних результатів (абсолютна похибка становить 0.036). Але якщо функцію $y = \arctan(x)$ наближати кількома прямими (кусково-лінійна апроксимація), то можна досягти досить точних результатів. Розіб'ємо проміжок $[0;1]$ на вісім рівних відрізків, на кожному з яких рівняння апроксимуючої прямої буде мати різний вигляд[12].

$$y \approx \begin{cases} 0.0001235662 + 0.994839960x, & 0 \le x \le 1/8 \\ 0.004072621 + 0.964989344x, & 1/8 < x \le 1/4 \\ 0.017899968 + 0.910336056x, & 1/4 < x \le 3/8 \\ 0.044740546 + 0.839015512x, & 3/8 < x \le 1/2 \\ 0.084473784 + 0.759613648x, & 1/2 < x \le 5/8 \\ 0.134708924 + 0.679214352x, & 5/8 < x \le 3/4 \\ 0.192103293 + 0.602631128x, & 3/4 < x \le 7/8 \\ 0.253371504 + 0.532545304x, & 7/8 < x \le 1 \end{cases}$$

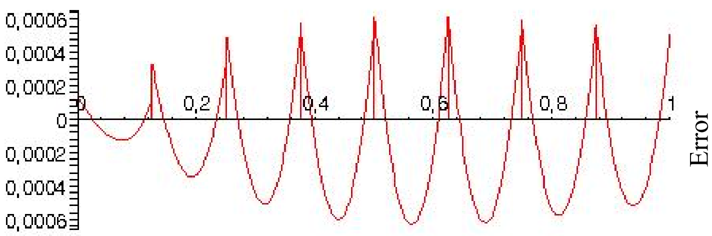

Рис. 2. Залежність похибки обчислення $\arctan(x)$ *при кусково-лінійній апроксимації*

За допомогою цього способу наближення максимальна абсолютна похибка не перевищує значення 0.00063, що є більш як в 50 разів точніше, ніж при простій лінійній апроксимації. Але це ще не межа – точність можна ще підняти, якщо наближати функцію більшою кількістю прямих.

Наближення рядом Тейлора

Функція $\arctan(x)$ розкладається в ряд Тейлора[18], неповною сумою якого можна наближати дану функцію. Даний ряд дуже повільно збігається, тому для високої точності потрібно брати багато перших членів ряду і при цьому необхідно буде здійснити багато математичних операцій, що займе тривалий час. Максимальні похибки, що виникають при наближеннях даним способом подано у таблиці 1.

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Таблиця 1

k	Похибка	k	Похибка
k=0	0.2146018365	k=5	0.0413866195
k=1	0.1187314968	k=6	0.0355364574
k=2	0.0812685032	k=7	0.0311302092
k=3	0.0615886397	k=8	0.0276933202
k=4	0.0495224714	k=9	0.0249382588

Похибки апроксимації $\arctan(x)$ *рядом Тейлора*

Як бачимо з таблиці метод є неточним і трудомістким. Точності можна досягти відкоригувавши неповний ряд Тейлора до такого вигляду[18]:

$$\arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{5x^9}{48} + \frac{x^{10}}{20} - \\ - \frac{43x^{11}}{176} + \frac{x^{12}}{4} - \frac{27x^{13}}{208} + \frac{x^{14}}{28} - \frac{x^{15}}{240}$$

За цією формулою абсолютна похибка, при однаковій кількості операцій множення, не перевищує $2.281 \cdot 10^{-7}$, що є в майже 10000 разів менше, ніж при наближенні рядом Тейлора . Якщо взяти формулу, що містить 11 перших членів ряду Тейлора,

$\arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{17}}{17} - \frac{x^{19}}{19} + \frac{x^{21}}{21}$ то бачимо, що при вищих значеннях степеня вона дає значно більшу похибку ($2.268 \cdot 10^{-2}$), ніж відкоригований вище неповний ряд Тейлора.

Поліноміальна апроксимація

Поліноміальна апроксимація є ефективним способом наближення. Для того, щоб досягти вищої точності наближення необхідно використовувати поліном вищого степеня. Похибку можна зменшити в 2 рази за рахунок розділення проміжку наближення на частини – кусково-поліноміальній апроксимації. Розглянемо на прикладі: нехай дано функцію[15] $\arctan(x) = -0.2880x^2 + 1.0797x$. На проміжку $x \in [0;1]$ вона дає похибку $7.05e-3$. Тепер розібємо проміжок $x \in [0;1]$ на чотири відрізки, кожному з яких буде відповідати різна функція:

$$y \approx \begin{cases} -0.2992x^2 + 1.0467x, & x \in [0;0.25] \quad \Delta = 2.02\text{e-}3 \\ -0.2917x^2 + 1.0797x - 0.005, & x \in (0.25;0.5] \quad \Delta = 1.72\text{e-}3 \\ -0.2916x^2 + 1.08015x - 0.003, & x \in (0.5;0.75] \quad \Delta = 5.3\text{e-}4 \\ -0.289x^2 + 1.08026x - 0.005, & x \in (0.75;1] \quad \Delta = 8.7\text{e-}4 \end{cases}$$

Як бачимо найбільша похибка при кусково-поліноміальній апроксимації на першому проміжку. Вона є меншою в три рази за похибку при $x \in [0;1]$, що свідчить про покращення результату. Кращої точності можна досягти при розділенні проміжку на більшу кількість відрізків, наближаючи при цьому функцію поліномом з різними коефіцієнтами .

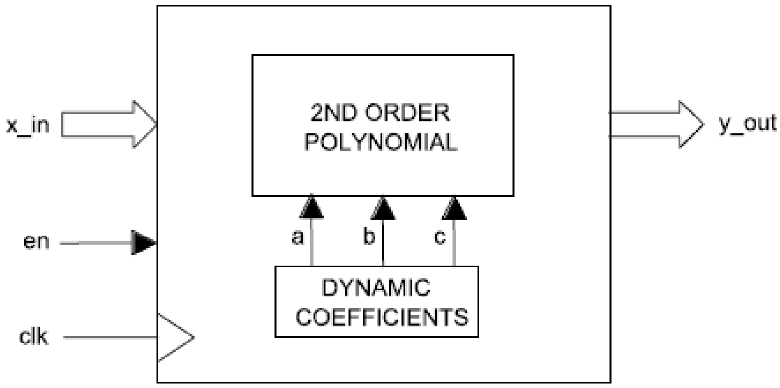

Рис. 3. Мікроконтроллер, що реалізує функцію $y = \arctan(x)$

Для відтворення функції арктангенса існують різні апаратні засоби: CORDIC-процесор, процесор кутового обертання, мікроконтролер[9], схему якого наведено на рис.3.

x_in – вхідне значення, двійкове 16-розрядне число на проміжку $[0;1]$, y_out – вихідне значення, двійкове 16-розрядне число на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Для обчислення функції в мікроконтроллері використовується поліном другого степеня $y = ax^2 + bx + c$. Коефіцієнти a, b, c динамічно змінюються в залежності від значення x_in, для того, щоб точніше здійснити апроксимацію. Результат y_out точний в межах 0,0002 радіан.

А зараз наведемо результати наших досліджень з апроксимації функції $y = \arctan(x)$ на проміжку $[0;\ 1]$ у порівнянні з відомими.

Таблиця 2

№	Література	Формула	Похибка
1.	[13]	$\arctan(x) \approx 0.0493 + 0.7918x$	$5.57e-2$
2.	*	$\arctan(x) \approx 0.0355 + 0.7854x$	$3.56e-2$
3.	[4]	$\arctan(x) \approx \frac{\pi}{4}x$	$7.11e-2$
4.	[4]	$\arctan(x) \approx 0.035550873 + \frac{\pi}{4}x$	$3.56e-2$
5.	[15]	$\arctan(x) \approx -0.2880x^2 + 1.0797x$	$7.05e-3$
6.	*	$\arctan(x) \approx 1.0549x - 0.26636x^2$	$3.37e-3$
7.	[7]	$\arctan(x) \approx 1.05848x - 0.27308x^2$	$3.74e-3$
8.	*	$\arctan(x) \approx -0.0024522 + 1.066295x - 0.275992x^2$	$2.45e-3$
9.	[4]	$\arctan(x) \approx \frac{\pi}{4}x + 0.273x(1-\lvert x\rvert)$	$3.76e-3$
10.	[4]	$\arctan(x) \approx \frac{\pi}{4}x - x(\lvert x\rvert - 1)(0.2447 + 0.0663\lvert x\rvert)$	$1.51e-3$
11.	[7]	$\arctan(x) \approx 0.967483x - 0.18208x^3$	$6.13e-3$
12.	*	$\arctan(x) \approx 0.973x - 0.19268x^3$	$5.08e-3$

13.	[7]	$\arctan(x) \approx 1.03011x - 0.17841x^2 - 0.06630x^3$	$1.51e-3$
14.	*	$\arctan(x) \approx -0.001103 + 1.036625x - 0.1859547x^2 - 0.0652734x$	$1.11e-3$
15.	*	$\arctan(x) \approx -0.0001062 + 1.0038343x - 0.01828713x^2 - 0.3380445x^3$ $+ 0.138108x^4$	$1.06e-4$
16.	[8]	$\arctan(x) \approx 0.14007x^4 - 0.34241x^3 - 0.01522x^2 + 1.00308x - 0.0000$	$1.51e-4$
17.	[7]	$\arctan(x) \approx 1.002936x - 0.016689x^2 - 0.33815x^3 + 0.137308x$	$1.36e-4$
18.	[5]	$\arctan(x) \approx \pi(0.318253x + 0.003314x^2 - 0.130908x^3 + 0.068542x^4$ $- 0.0091159x^5)$	$2.67e-4$
19.	[7]	$\arctan(x) \approx 0.994766x - 0.285434x^3 + 0.0760663x$	$7.04e-4$
20.	[6]	$\arctan(x) = 0.02084x^9 - 0.08513x^7 + 0.18014x^5 - 0.3303x^3 + 0.999$	$2.18e-5$
21.	[1]	$\arctan(x) \approx x$	$2.15e-1$
22.	[1]	$\arctan(x) \approx \frac{3x}{3 + x^2}$	$3.54e-2$
23.	*	$\arctan(x) \approx \frac{3.794x}{3.845 + x^2}$	$2.32e-3$
24.	[8]	$\arctan(x) \approx \frac{x}{1 + 0.28125x^2}$	$4.91e-3$
25.	*	$\arctan(x) \approx \frac{x}{1.013 + 0.263899x^2}$	$2.25e-3$
26.	*	$\arctan(x) \approx \frac{x}{0.9848 + 0.09184x + 0.1972x^2}$	$7.40e-4$
27.	*	$\arctan(x) \approx \frac{x}{0.90871 + 0.358x}$	$6.98e-3$
28.	*	$\arctan(x) \approx \frac{-0.000519 + 0.906828x}{0.889234 + 0.0894112x + 0.176162x^2}$	$5.84e-4$
29.	*	$\arctan(x) \approx \frac{0.6909133x + 0.39657x^2}{0.6929 + 0.37274x + 0.319x^2}$	$7.10e-5$
30.	[1]	$\arctan(x) \approx \frac{15x+4x^3}{15+9x^2}$	$6.27e-3$

31.	*	$\arctan(x) \approx \dfrac{15.474x + 2.97874x^3}{15.485 + 8.0066x^2}$	$1.06e-4$
32.	*	$\arctan(x) \approx \dfrac{0.56845192x + 0.41414x^2 + 0.28016x^3}{0.5684175 + 0.414948x + 0.463323x^2 + 0.161096x^3}$	$7.89e-7$
33.	[1]	$\arctan(x) \approx \dfrac{105x + 55x^3}{105 + 90x^2 + 9x^4}$	$1.08e-3$
34.	*	$\arctan(x) \approx \dfrac{104.9998x + 45.2979x^3}{105 + 80.247x^2 + 6.1195394x^4}$	$6.42e-6$
35.	[1]	$\arctan(x) \approx \dfrac{945x + 735x^3 + 64x^5}{945 + 1050x^2 + 255x^4}$	$1.87e-4$
36.	[1]	$\arctan(x) \approx \dfrac{1155x + 1190x^3 + 231x^5}{1155 + 1575x^2 + 525x^4 + 25x^6}$	$3.23e-5$
37.	[10]	$\arctan(x) \approx \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{x}{0.63 + \sqrt{0.88 + x^2}}$	$4.44e-4$
38.	*	$\arctan(x) \approx \dfrac{1.5707x}{0.62974 + \sqrt{0.88 + x^2}}$	$3.90e-4$

Формули,позначені *, є запропоновані авторами.

4. ВИСНОВКИ

Найвищу точність при знаходженні значення арктангенса дає апроксимація раціональними функціями, єдиним недоліком якої є низька швидкодія, оскільки операція ділення, як правило, виконується значно повільніше, ніж операція множення. Ще вищу точність при наближенні можна досягнути при використанні кусково-лінійної та кусково-нелінійної апроксимації. Так, наприклад, при лінійній апроксимації, розбивши на вісім відрізків проміжок $x \in [0;1]$, кожному з яких буде відповідати своя функція, максимальна похибка буде становити 0.00063, а при наближенні однією функцією на загальному проміжку похибка – 0.036. Подані авторами формули в таблиці 2, в яких лише змінено сталі коефіцієнти, зменшують похибки від декількох процентів до декількох порядків, наприклад, формули (33-34).

1. Jörg Arndt, Algorithms for programmers: ideas and source code draft version of 21/01/2009, –968 p. http://www.jjj.de. 2. Daniel Moga, Wireless system for remote tilt measurement in Monitoring and control applications / Daniel Moga, *Radu A. Munteanu, Mihai Dumitrian, Mirella Dobra, Rozina Moga// Advances in Electrical and Computing Engineering. –2008. – Vol. 8. –№2. – pp. 32–36. 3. Sheung Hun Cheng, Nicholas J. Higham, Charles S. Kennely, Alan J. Laub . Return to the middle ages: a half-angle iteration for the logarithm of a unitary Matrix. http://www.citeseer.ist.psu.edu. 4. Sreeraman Rajan, Sichun Wang, Robert Inkol. Efficient approximations for the four-quadrant arctangent function. IEEE CCECE/CCGEI, Ottawa May 2006, pp.1043-1046. 5. Amy Mar. Digital signal processing applications. Using the ASP-2100 family, 1990 by analog devices, Inc., Norwood, MA 02062. http://www.emt.uni-linz.ac.at. 6. V.V. Chekushkin. Implementing the transformation of representations of orthogonal signal components in amplitude and phase/ V.V. Chekushkin // Measurement Techniques, – 2001. –Vol.44. – No. 4. –pp. 358–364. 7. Hongwei Guo. Approximation for the arctangent function in efficient fringe pattern analysis/ Hongwei Guo, Guoqing Liu// Optics Express3053, –2007. –Vol. 15. –No. 6. 8. Richard G. Lyons. Understanding digital signal processing / Richard G. Lyons. –New Jersy: Prentice Hall, 2004. –664 p. 9. ZIPcores, http://www.zipcores.com. 10. Velmurugan R. On low-power analog implementation of particle filters for target tracking/ R. Velmurugan, Sh. Subramanian, V. Cevher, D. Abramson, M. Odame, J.D. Gray, Haw-Jing Lo, J.H. McClellan, D. Anderson. http://www.ee.iitb.ac.in. 10. I. Feldmann, S. Askar, N. Brandenburg, P. Kauff, O. Schreer, "Real-Time Segmentation for Advanced Disparity Estimation in Immersive Videoconference Applications", Proc. of 10th Int. Conference on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision (WSCG 2002), pp.171-178, Plzen, Czech Republic, February 2002. 11. R. Green, Faster math functions, Sony Computer Entertainment Research and Development 2003. http://www.research.scea.com. 12. Благовещенский Ю. В. Вычисление елемента-рних функций на ЭВМ/ Ю. В. Благовещенский, Г.С. Теслер. –К.: Техніка, 1977. – 208 с. 13. A. Burg, E. Beck, M. Rupp, D. Perels, N. Felber, W. Fichtner. FPGA implementation of a MIMO receiver front-end for UMTS. In Proceedings of the of the IEEE Int. Zurich Seminar on Broadband Communication (IZS), pp. 8.1--8.6, February 2002 http://www.iis.ee.ethz.ch. 14. J. Y. Stein, Digital signal processing: a computer science perspective, John Wiley & Sons, Inc. 2000, pp. 605-618, ISBN 0-471-29546-9. http://www.dspcsp.com. 15. J. Arvo, Graphics gems II, by Academic Preess, Inc. 1991, P. 473, ISBN 0-12-059756-X. 16. H. A. Medina, A sequence of hermite interpolating-like polynomials for approximating arctangent. http://myweb.lmu.edu*