УДК 519.142.6; 621.391.
© Л. Дідух[1], М. Шовгенюк[1,2], 2010

КЛАСИ ПОДІБНИХ МАТРИЦЬ АДАМАРА

Проведено класифікацію множини всіх ортогональних матриць Адамара розмірністю 4x4 за ознакою подібності. Встановлено, що існує 384 таких матриці, які належать до 6 різних класів. Кожен клас подібних матриць Адамара, який характеризується спектром власних значень, містить різну кількість матриць трьох типів – канонічних, світлих та матриць 50/50. Визначено число матриць, які належать до кожного з класів.

The classification for set of orthogonal Adamar matrixes with dimension 4x4 is performed on the basis of similarity. It is established the existence of 384 such matrixes belonging to 6 different classes. The every similar Adamar matrixes class characterized by the eigenvalues spectrum contains different number of matrixes belonging to three types - canonical, light and 50/50 matrixes. The number of matrixes belonging to the every class is defined.

1. ВСТУП

З появою цифрової обчислювальної техніки у світі не послаблюється інтерес до проблеми дослідження унікальних властивостей ортогональних матриць Адамара, їх систематизація та пошук нових областей практичного використання [1]. На основі матриць Адамара побудоване дискретне ортогональне перетворення Уолша-Адамара [2,3], яке широко використовується для цифрової обробки зображень, дискретного спектрального аналізу сигналів та зображень, криптографії та кодування зображень [4]. Відомі праці [5,6] по використанню матриць Адамара для комбінаторного аналізу та створення різноманітних кодів перетворення і передачі інформації.

Авторами [7-10] запропонований метод кодування графічних зображень впорядкованими неперіодичними бінарними структурами, побудованих на основі одного типу матриць Адамара. Зокрема встановлено [10,11], що кодуючі структури можна класифікувати за їх частотною характеристикою.

Метою даної роботи є класифікація за ознакою подібності множини всіх ортогональних матриць Адамара розмірністю 4×4, що дозволяє виявити більш загальні властивості таких матриць для пошуку нових ефективних методів кодування графічних зображень.

---

[1] Українська академія друкарства
[2] Інститут фізики конденсованих систем НАН України

Матриця Адамара розмірністю 4×4 визначається за правилом кронекерівського добутку

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

де H_2 - мінімальна матриця Адамара розмірністю 2×2 [2,3,12]:

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Правило (1) можна використати на випадок побудови матриць Адамара вищих розмірностей $N \times N$, де $N = 2^n$. Для довільної матриці Адамара H_N добуток

$$H_N \cdot H_N^T = H_N \cdot H_N^{-1} = I, \qquad (3)$$

де I - одинична матриця. Таким чином, матриці Адамара H_N відносяться до класу ортогональних матриць [13,14], коли транспонована матриця Адамара H_N^T є і оберненою матрицею Адамара H_N^{-1}.

Матриці Адамара H характеризуються фундаментальною властивістю [1-3]: при довільних перестановках рядків чи стовпців матриці Адамара новоутворені матриці Адамара H_{new} залишаються ортогональними. Також властивість ортогональності матриць Адамара не змінюється при множенні на -1 всіх елементів h_{ij} $i-$того рядка чи $j-$того стовпця матриці (1). Для аналітичного опису процесу перестановок рядків/стовпців введемо, як приклад, матрицю перестановок

$$P = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

з 4-ма ненульовими коефіцієнтами k_{ij}, які знаходяться на перетині $i-$того рядка та $j-$того стовпця. Кожен коефіцієнт k_{ij} може характеризуватися двома значеннями 1 або -1. Тоді в залежності від величини коефіцієнтів k_{ij} матриця (4) має 16 різних варіантів. Всього нараховується 24 різних матриць перестановок (4).

Зауважимо, що при множенні всіх рядків/стовпців матриць (1)-(3) на -1 отримуємо *інверсну* матрицю Адамара $-H$.

Серед множини матриць Адамара розмірності 4×4 необхідно виділити три групи.

До першої з них належать матриці Адамара *канонічного* типу, в яких всі елементи одного рядка і одного стовпця рівні 1. Типовим прикладом цієї групи є симетрична канонічна матриця Адамара

$$H_C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

впорядкована за числом зміни знаку в рядках/стовпцях [2,15]

До другої групи можна віднести матриці Адамара з одинаковою кількістю елементів рівних 1 і -1, які будемо називати "*матриці* $50/50$". Прикладом таких матриць є $S-$подібна матриця Адамара [7]

$$H_S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

До третьої групи належать матриці Адамара з мінімальною кількістю елементів, рівних -1, які будемо називати "*світлими*". Прикладом є, як аналог матриці I, діагональна матриця Адамара

$$H_L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Надалі будемо розглядати загальний випадок квадратних матриць Адамара розмірністю 4×4 $H = \left[h_{ij}\right]$, де елементи матриці h_{ij} рівні 1 або -1. Якщо розглядати елементи $i-$того рядка матриці (1) як координати базового вектора $\mathbf{e}_i\left(h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}\right)$, то із рівняння (3) випливає, що скалярний добуток

$$\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) = \sum_{n=1}^{4} h_{in} h_{jn} = 0 \tag{8}$$

є умовою ортогональності $i-$ого і $j-$ого рядків матриці $H = \left[h_{ij}\right]$. Тоді система 6 рівнянь (8) буде складати умову ортогональності всіх рядків матриці Адамара. Аналогічно (8) можна записати умову ортогональності всіх векторів-стовпців матриці Адамара.

2. НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ УМОВИ ПОДІБНОСТІ МАТРИЦЬ

З теорії матриць відомо [14,15], що матриця H_2 подібна до матриці H_1 тоді, коли існує невироджена матриця перестановок (4) така, що виконується умова перетворення подібності (необхідна умова)

$$H_2 = P \cdot H_1 \cdot P^{-1}. \tag{9}$$

Тут матриця P виконує функцію трансформуючої матриці. Тоді ми можемо досліджувати класи подібних матриць Адамара відносно всеможливих перестановок рядків/стовпців однієї матриці Адамара. Відношення "H_2 подібна H_1" будемо скорочено записувати $H_2 \sim H_1$. Перетворення подібності (9) характеризується трьома цінними властивостями [14].

Матриця Адамара H завжди подібна сама до себе, тобто $H \sim H$, коли $P \equiv I$.

Якщо $H_2 \sim H_1$, то виконується симетричне перетворення подібності $H_1 \sim H_2$, тобто обернене перетворення подібності

$$H_1 = P^{-1} \cdot H_2 \cdot P. \tag{10}$$

Якщо $H_1 \sim H_2$ і $H_2 \sim H_3$, то автоматично випливає, що $H_1 \sim H_3$. Ця властивість виводиться аналітично

$$H_1 = P_1 \cdot H_2 \cdot P_1^{-1},\ H_2 = P_2 \cdot H_3 \cdot P_2^{-1} \ \rightarrow\ H_1 = \left(P_1 \cdot P_2\right) \cdot H_3 \cdot \left(P_1 \cdot P_2\right)^{-1}. \tag{11}$$

Побудуємо для довільної матриці Адамара H характеристичну матрицю $H - \lambda I$. Знайдемо визначник цієї матриці:

$$\Delta(\lambda) = \det\left(H - \lambda I\right) = \lambda^4 - a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_1\lambda \pm 1, \tag{12}$$

який дає характеристичний многочлен 4-ої степені, коефіцієнти a_i якого однозначно визначаються елементами h_{ij} матриці Адамара. Розв'язок характеристичного рівняння $\Delta(\lambda) = 0$ дає спектр власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ матриці Адамара.

Звідси отримуємо критерій подібності [3,12,15] матриць Адамара. Для того, щоб дві матриці Адамара H_1 і H_2 були подібними, необхідно і достатньо, щоб вони мали один і той самий характеристичний многочлен (12) і, відповідно, одинаковий спектр власних значень: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

3. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ РІВНЯННЯ ГРУП МАТРИЦЬ АДАМАРА

Покажемо, що вся множина матриць Адамара розмірністю 4×4 поділяється на 6 різних класів. Належність тієї чи іншої матриці Адамара до кожного з цих класів описується характерним спектром власних значень.

<u>Клас I</u>. Для визначення групи матриць цього класу виберемо симетричну канонічну матрицю Адамара (5). Характеристичне рівняння матриці має вигляд:

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 . \qquad (13)$$

Звідси отримуємо, що клас I матриць Адамара описується наступним спектром дійсних власних значень:

$$\lambda_1 = 1;\ \ \lambda_2 = 1;\ \ \lambda_3 = -1;\ \ \lambda_4 = -1. \qquad (14)$$

Зауважимо, що при множенні власних значень (14) на -1 спектр власних значень не змінюється. Таким чином, інверсна канонічна матриця Адамара $-H_C$ теж описується спектром (14).

Тепер, використовуючи формулу (9), можна визначити число матриць Адамара класу I, які подібні до канонічної матриці (5). Проведені дослідження показали, що існує лише три відмінні між собою матриці перестановок P, які утворюють клас I подібних матриць Адамара зі спектром власних значень (14).

Для наглядності на рис.1 приведений клас I подібних матриць Адамара у вигляді діаграм, де кольором позначені елементи -1, а елементам 1 відповідають світлі комірки. Як бачимо, до класу I входять матриці Адамара всіх трьох типів. Серед них найбільша кількість канонічних матриць – 12 (червоний колір), в позначеннях яких фігурує літера C; 6 матриць $50/50$ (синій колір), в позначеннях яких фігурує буква M; 6 світлих матриць (зелений колір), позначених літерою L, серед яких 3 інверсні світлі матриці Адамара. Загалом клас I включає 24 симетричні матриці Адамара плюс 24 інверсні симетричні матриці, кожна з яких характеризується спектром власних значень (14).

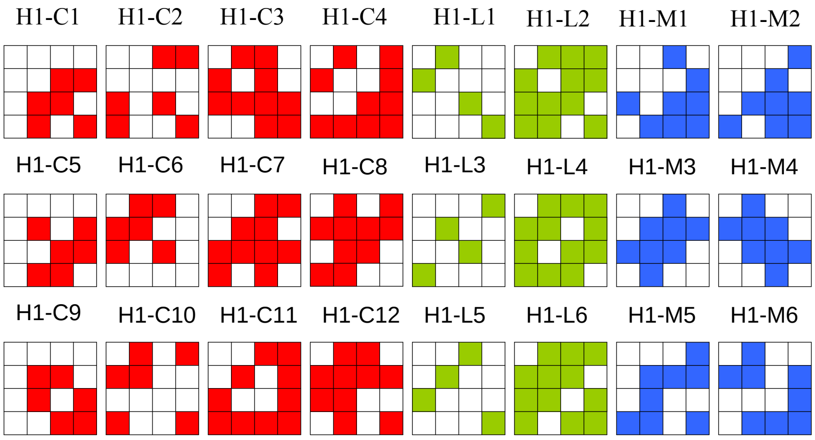

Рис. 1. Діаграми, що характеризують клас I подібних симетричних матриць Адамара

<u>Клас II</u>. Цей клас побудований на базі симетричної світлої матриці Адамара (7), яка описується характеристичним рівнянням

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = 0. \tag{15}$$

Тоді клас II матриць Адамара має спектр власних значень

$$\lambda_1 = 1; \;\; \lambda_2 = -1; \;\; \lambda_3 = -1; \;\; \lambda_4 = -1. \tag{16}$$

Використання умови подібності (9) для довільно вибраної матриці перестановок P дає лише 8 симетричних матриць Адамара, які приведені на рис.2.

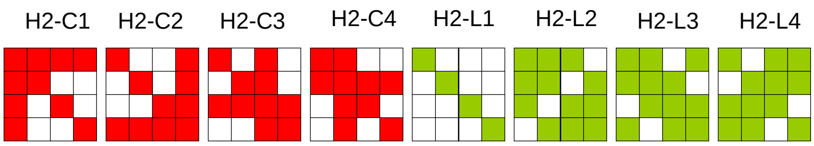

Рис. 2. Діаграми, які характеризують клас II подібних симетричних матриць Адамара

Як видно, до класу II входить 4 інверсні симетричні матриці Адамара канонічного типу і така ж кількість світлих матриць Адамара, серед яких крім базової матриці H2-1L, всі інверсні матриці Адамара.

Якщо вибрати за базову інверсну світлу матрицю Адамара (7), то маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = 0\,, \tag{17}$$

яке в порівнянні з рівнянням (15) для непарних степенів змінює знак і, відповідно, спектр власних значень рівняння (17)

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 = 1. \qquad (18)$$

Таким спектром характеризуються ще 8 матриць Адамара класу II: 4 матриці Адамара канонічного типу (рис. 2) і кожна з L-матриць інверсна. Матриці $50/50$ в цьому класі відсутні.

До класів I і II входять всі симетричні матриці Адамара, які мають дійсні спектри власних значень (14), (16) і (18).

<u>Клас III</u>. Для визначення матриць Адамара цього класу виберемо за базову $S-$подібну матрицю Адамара (6). Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд

$$\lambda^4 - 1 = 0 \qquad (19)$$

Розв'язками цього рівняння є два дійсних та два комплексно-спряжених власних значенняі:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = \exp(i\pi/2); \quad \lambda_4 = \exp(-i\pi/2). \qquad (20)$$

Слід зауважити, що при домножуванні на -1 розв'язки (20) переходять самі в себе. Таким чином, інверсна $S-$подібна матриця Адамара також буде мати характеристичне рівняння (19).

На рис. 3 приводяться 8 подібних матриць Адамара групи III, які генеруються діагональною матрицею перестановок. Як видно, в цю групу входять 4 матриці Адамара канонічного типу, причому 2 з них інверсні, і чотири матриці $50/50$. Світлих матриць в групі III немає.

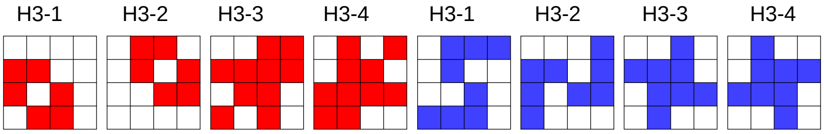

Рис. 3. Діаграми, які характеризують III клас подібних матриць Адамара

Характерно, що всі подібні матриці Адамара групи III утворюють пари обернених матриць Адамара. Проведені дослідження показали, що група III подібних матриць Адамара генерується відповідно до формули (9) лише 3-ма різними матрицями перестановок P . Тоді повна група III нараховує: 12 канонічних матриць Адамара, 12 матриць $50/50$, 24 інверсних канонічних і $50/50$ матриць Адамара.

<u>Клас IV</u>. Для побудови цього класу виберемо базову матрицю

$$H_{IV} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0\,. \qquad (22)$$

Звідси отримуємо спектр власних значень

$$\lambda_1 = 1;\;\; \lambda_2 = 1;\;\; \lambda_3 = \exp(i\pi/2);\;\; \lambda_4 = \exp(-i\pi/2). \qquad (23)$$

Як бачимо, на відміну від попереднього класу III, тут дійсне власне значення кратне 2. На рис. 4 приведені 8 подібних матриць Адамара класу IV, які генеруються діагональною матрицею перестановок.

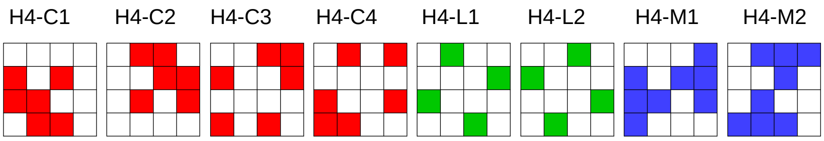

Рис. 4. Діаграми, які характеризують IV клас подібних матриць Адамара

Як видно із рис. 4, всі три типи матриць утворюють пари взаємо-обернених матриць Адамара. Повний клас IV подібних матриць Адамара генерується 3-ма матрицями перестановок і нараховує 12 матриць канонічного типу, 6 світлих матриць і 6 матриць $50/50$. Це саме число подібних інверсних матриць Адамара класу IV має спектр власних значень (23) з протилежним знаком.

<u>Клас V</u>. Існує новий клас подібних матриць Адамара на основі базової асиметричної матриці Адамара $50/50$

$$H_V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

з характеристичним рівнянням

$$\lambda^4 + 1 = 0\,. \qquad (25)$$

і спектром 2-х пар комплексно-спряжених власних значень

$$\lambda_1 = \exp(i\pi/4);\; \lambda_2 = \exp(-i\pi/4);\; \lambda_3 = -\exp(i\pi/4);\; \lambda_4 = -\exp(-i\pi/4). \qquad (26)$$

Слід зауважити, що ці власні значення також переходять самі в себе при домножуванні їх на -1. Тобто інверсна матриця (24) має аналогічний спектр власних значень (26).

На рис. 5 приведені 8 подібних матриць Адамара групи V, які генеруються діагональною матрицею перестановок. Ця група також складає половину матриць Адамара канонічного типу і половину матриць $50/50$, які попарно взаємно-обернені.

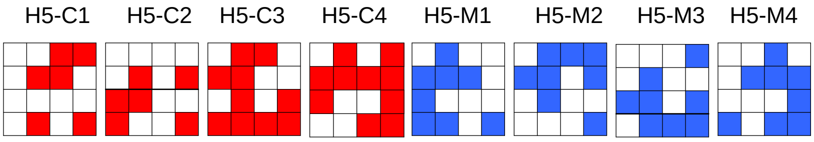

Рис. 5. Діаграми, які характеризують V клас подібних матриць Адамара.

На відміну від класу III, новий клас IV подібних асимет-ричних матриць Адамара із спектром власних значень (23) вдвічі більший і нараховує 24 канонічних матриці Адамара, 24 матриці $50/50$ і 48 інверсних канонічних і $50/50$ матриць Адамара.

<u>Клас VI</u>. За базову матрицю цього класу виберемо матрицю Адамара $50/50$

$$H_{VI} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Характеристичне рівняння матриці (24) має вигляд

$$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda - 1 = 0 \tag{28}$$

і, відповідно, спектр власних значень

$$\lambda_1 = 1;\ \ \lambda_2 = -1;\ \ \lambda_3 = -\exp(i\pi/3);\ \ \lambda_4 = -\exp(-i\pi/3). \tag{29}$$

Очевидно, що інверсна матриця (27) буде характеризувати спектром (29) з протилежним знаком власних значень.

Слід відмітити, що спектр (26) характеризується двома новими комплексно-спряженими власними значеннями, які не зустрічаються в попередніх класах.

Особливістю класу VI подібних матриць Адамара є те, що він генерується максимальною кількістю різних матриць перестановок, рівною 8.

Клас VI подібних матриць включає всі три типи матриць Адамара і нараховує 32 матриці канонічного типу, 8 світлих матриць і 24 матриці $50/50$.

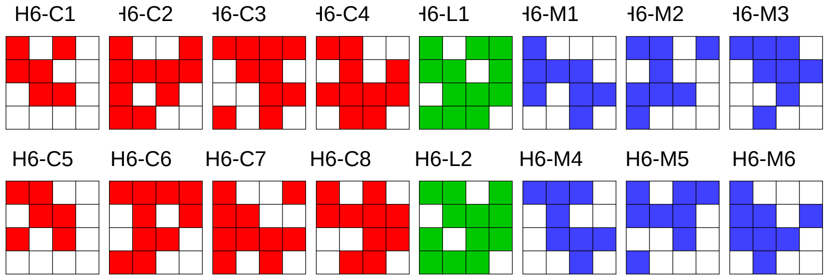

Рис. 6. Діаграми, які характеризують VI клас подібних матриць Адамара

На рис. 6 приведені подібні матриці Адамара класу VI для двох різних матриць перестановок. Така ілюстрація зумовлена тим, що пари взаємно-оберненених матриць Адамара утворюються при різних матрицях перестановок.

Характерно, що подібні матриці канонічного типу змішані і нараховують $3/4$ інверсних матриць. Всі світлі матриці інверсні. Якщо вибрати за базову інверсну матрицю (27), то кількість прямих і інверсних подібних матриць класу VI буде мінятися місцями.

4. ВИСНОВОК

На основі проведених досліджень встановлено, що з використанням критерію подібності відносно всеможливих перестановок рядків/стовпців матриць Адамара розмірністю 4×4 множина матриць Адамара поділяється на 6 різних класів. Кожен клас подібних матриць Адамара характеризується спектром власних значень. Класи I, III і V подібних матриць Адамара, включаючи інверсні матриці, описуються єдиним спектром власних значень. Відповідно, класи II, IV і VI подібних і інверсних подібних матриць Адамара описуються спектрами власних значень з протилежним знаком.

Всі класи подібних матриць Адамара включають половину матриць канонічного типу. Проте, в кожен клас входить різна кількість матриць канонічного типу: клас I – 12 матриць; клас II – 4 матриці; клас III – 12 матриць; клас IV – 12 матриць; клас V – 24 матриці; клас VI – 32 матриць. Таким чином, їх загальна кількість - 96 матриць Адамара і 96 інверсних матриць Адамара канонічного типу.

Світлі матриці Адамара: клас I – 6 матриць; клас II – 4 матриці; клас IV – 6 матриць; клас VI – 8 матриць. Загальна кількість - 24 світлі і 24 інверсні світлі матриці Адамара.

Матриці Адамара $50/50$: клас I – 6 матриць; клас III – 12 матриць; клас IV – 6 матриць; клас V – 24 матриці; клас VI – 24 матриці. Загальна кількість - 72 матриці і 72 інверсні матриці Адамара $50/50$.

Загалом множина матриць Адамара розмірністю 4×4 складає 192 матриці і 192 інверсні матриці. Кожна з таких матриць Адамара може бути використана для кодування графічних зображень.

1. K.J. Horadam, Hadamard matrices and their applications. Princeton University Press, 2006, 278 p. 2. Хармут Х. Теория секвентного анализа. Основы и применения. М.: Мир, 1980 – 574 с. 3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Книга 1. М:. Мир, 1982 - 310 с. 4. Прайт В., Кайн Ж., Эндрюс Г. Кодирование изображений с использованием преобразования Адамара // ТИИЭР, т. 57, № 1 (1969). 5. Белецкий А.Я. Комбинаторика кодов Грея. Киев: КВІЦ, 2003. – 506с. 6. Белецкий, А. Я. Квазиэквидистантные коды. - К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту "НАУ-друк", 2008. - 459 с. 7. Патент України № 64836. Графічний елемент захисту банкнот, цінних паперів, документів та спосіб його виготовлення // Автори: Шовгенюк М.В., Білорус В.Є., Козловський М.П., Крохмальський Т.Є. 2004 р. Бюл. № 3. 8. Шовгенюк М., Дідух Л. Графічний елемент захисту цінних паперів // Комп'ютерні технології друкарства, №16, 2006 – с.245-251. 9. Шовгенюк М.В., Дідух Л.А. Метод кодування графічних зображень та впровадження нової технології захисту цінних паперів // Наука та інновації, 2009, Т.5., №1, С. 50-60. 10. Дидух Л.А., Шовгенюк М.В. Методы кодирования графических изображений с использованием матриц Адамара // Международная конференция «PRINT-2009», г. Санкт-Петербург, апрель 2009. 11. Шовгенюк М.В., Дідух Л.А. Властивості неперіодичних структур для кодування зображень у технологіях захисту цінних паперів // Управління розвитком, № 15, Харків, Вид. ХНЕУ, 2008, с.14-15. 12. Hadamard J. Resolution d'une Question Relative aux Determinants // Bull. Sci. Math. Ser. 2, 17, Part 1, P. 240-246 (1893). 13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988 – 550 с. 14. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989 – 655 с. 15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968, – 720с.