УДК 517
© *О. Овсяк*[1], *2010*

РОЗШИРЕНА АЛГЕБРА АЛГОРИТМІВ І МОДЕЛЬ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ КЛАСИЧНОЮ І РОЗШИРЕНОЮ ОПЕРАЦІЄЮ ЕЛІМІНУВАННЯ

Описана створена аксіоматичним методом алгебра алгоритмів, яка розширена введенням багатозначних умовних унітермів та аксіомами операцій елімінування і реверсування. Встановлено зв'язок між елімінуванням за двозначним та багатозначним унітермами.

Described by axiomatic methods algebra of algorithms are expanded by the introduction of significant conventional uniterms and axioms of elimination operation and reversing. The link between elimination for two-digit and multidigit number uniterms are established.

1. ВСТУП

Математичною основою інформаційних технологій і систем є теорія алгоритмів. Найчастіше алгоритми описуються вербально або у вигляді блок-схем. Крім цих двох методів відомі ще такі методи подання алгоритмів: віртуальних машин Поста (Posta) [1], Тюрінга (Turinga) [2], Ахо-Ульмана-Хопкрофта (Aho-Ullmana-Hopcrofta) [3], Шонгаге (Schönhage) [4], рекурсивних функцій (числення λ, Чорч (Church)) [5], алгоритмів Маркова (Markova) [6], b-комплексів Колмогорова (Kolmogorova) (машина Kolmogorova) [7], універсальних алгоритмів Крініцкого (Krinitskiego) [8] та алгебри алгоритмів [9]. Відомо, що вербальним і блок-схемними методами, а також методами [1] – [8], алгоритми описуються інтуїтивно, а не формально. Лише засобами алгебри алгоритмів отримується опис алгоритмів у вигляді формул, як на абстрактному, так і змістовному, рівнях. Над формулами - алгоритмами, з метою їх мінімізації, на підставі властивостей операцій, можуть бути виконані перетворення і дослідження їх достовірності. Власне ці переваги алгебри алгоритмів над всіма іншими методами опису алгоритмів творять основу для її застосувань для синтезу мінімізації і дослідження математичних моделей інформаційних технологій і систем.

Однак класична алгебра алгоритмів [9] оперує над умовними унітермами, які приймають тільки два значення (наприклад "так" і "ні" або 0 і 1). Досить часто умовний унітерм приймає більше

[1]Львівська філія Київського національного університету культури і мистецтва

ніж два значення. Наприклад, сучасна мова об'єктно-рієнтованого програмування, якою є **C#**, має оператор **"switch … case"**, використовуваний для вибору однієї гілки коду з багатьох можливих гілок коду [10]. Засобами класичної алгебри алгоритмів можливо описати алгоритми, які містять поспіль більше ніж дві умови. Однак, такі формули – алгоритми є складними і трудними для сприймання. З метою усунення цих недоліків, у даній статті, введено розширення класичної алгебри алгоритмів і подано моделі взаємних переходів від операції елімінування з двозначним умовним унітермом до операції елімінування з багатозначним умовним унітермом.

Для дефініції розширеної алгебри алгоритмів використано аксіоматичний метод. Подано означення унітермів, як символів і знаків над якими виконуються операції розширеної алгебри алгоритмів. Розрізняються унітерми-костанти, унітерми-змінні (вільні і звязанні), абстрактні та змістовні унітерми. Наведено аксіоми операцій розширеної алгебри алгоритмів, якими є операції рівності, секвентування, елімінування, паралелення, реверсування та операції циклічного секвентування, циклічного елімінування і циклічного паралелення. Дано індукційне означення алгоритму та означення розширеної алгебри алгоритмів.

До аксіом класичної операції елімінування додано такі аксіоми: вибору унітерма на підставі багатозначної умови, поглинання унітерма багатозначної умови, вибору багатозначної умови, поглинання унітермів. Операція реверсуванн розширена такими аксіомами: переставляння унітермів в елімінуванні з багатозначною умовою, вибору унітерма реверсивної умови та вибору унітерма на підставі реверсивної умови.

Індукційне означення алгоритму доповнено елімінуванням з багатозначним умовним унітермом, реверсуванням елімінування з багатозначним умовним унітермом та елімінуванням з реверсивним багатозначним унітермом.

Наведено приклад використання розширеної алгебри алгоритмів, яким проілюстровано, що у порівнянні з використанням класичної алгебри алгоритмів, досягається спрощення запису і більша наочність формул алгоритмів розширеної алгебри алгоритмів. У поданому прикладі формули алгоритму зменшено у 5 разів кількість знаків операції елімінування і у 4 рази зменшено кількість умовних унітермів.

2. АЛФАВІТ АЛГЕБРИ АЛГОРИТМІВ

Означення 1. Алфавіт алгебри алгоритмів утворюють:

1.1) знаки операцій: $\frown$ - секвентування; $\vdash\!\dashv$ - елімінування; $\overline{\quad}$ - інвертування; $\not\subset$ - циклічного секвентування; $\not\vdash$ - циклічного елімінування; $\sqcap$ - паралелення, $\varnothing$ - циклічного паралелення; = - дорівнює;

1.2) незв'язані операціями циклу унітерми змінні, коефіцієнти, константи, які позначаються малими літерами з початку латинського алфавіту:

$$\boldsymbol{a, b, c_o, c_1, \ldots, c_j, c^0, c^1, \ldots, c^I, c^i_j, \ldots};$$

1.3) зв'язані операціями циклу унітерми змінні, які позначаються малими літерами з кінця латинського алфавіту:

$$\boldsymbol{x, y, z_o, z_1, \ldots, z_j, z^0, z^1, \ldots, z^I, z^i_j, \ldots};$$

1.4) незалежні або залежні від однієї чи багатьох змінних унітерми над якими виконуються операції і які позначаються великими літерами латинського алфавіту:

$$\boldsymbol{A, B, P(a), P(a,b), \ldots};$$

1.5) унітерми умов:

1.5.1) які приймають два значення (***0*** (“***ні”)*** або ***1 (“так”)***)

$$\boldsymbol{u, u_o, u_1, \ldots, u_j, u^i_j};$$

1.5.2) які приймають більше ніж два значення

$$\boldsymbol{w, w_0, w_1, \ldots, w_r, w^s_t};$$

1.6) ***** - порожній унітерм;

1.7) дві крапки (**:**), крапка з комою (**;**) і кома (**,**).

3. ОПЕРАЦІЇ АЛГЕБРИ АЛГОРИТМІВ

Означення 2. Операція , яка має властивості:

2.1) тотожності: $\boldsymbol{A = A}$;

2.2) симетрії: *якщо* $\boldsymbol{A = B}$, *то* $\boldsymbol{B = A}$;

2.3) транзитивності: *якщо* $\boldsymbol{A = B}$ *і* $\boldsymbol{B = C}$, *то* $\boldsymbol{A = C}$;

називається операцією **дорівнює**.

Означення 3. Операція , яка має властивості:

3.1) поглинання унітема $\overgroup{\boldsymbol{S, S}} = \boldsymbol{S}$;

3.2) поглинання порожнього унітерма $\boldsymbol{*:} \overgroup{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}$, де, знак “**:**” означає кому або крапку з комою;

3.3) комутативності: $\overgroup{\boldsymbol{R, S}} = \overgroup{\boldsymbol{S, R}}$

3.4) асоціативності: $\overgroup{\overgroup{\boldsymbol{R,S}}, \boldsymbol{T}} = \overgroup{\boldsymbol{R}, \overgroup{\boldsymbol{S, T}}}$,

3.5) зв'язку між комутативністю і некомутативністю:

$$\overgroup{\overgroup{\boldsymbol{A: B}}, \overgroup{\boldsymbol{A: C}}} = \overgroup{\boldsymbol{A:} \overgroup{\boldsymbol{B: C}}}, \quad \overgroup{\overgroup{\boldsymbol{A: B}}, \overgroup{\boldsymbol{C: B}}} = \overgroup{\overgroup{\boldsymbol{A: C}} \boldsymbol{: B}},$$

де, знак “**;**” означає кому або крапку з комою;

називається **секвентуванням**.

Означення 4. Операція яка має властивості:

4.1) вибору унітерма за двозначним умовним унітермом:

$$\overline{\boldsymbol{R\,;\,S\,;\,u\,-\,?}} = \begin{cases} \boldsymbol{R}, \text{ якщо } \boldsymbol{u = 1}; \\ \boldsymbol{S}, \text{ якщо } \boldsymbol{u = 0}; \end{cases}$$

4.2) вибору унітерма за багатозначним умовним унітермом:

$$\overline{\boldsymbol{R;\,S;\,\dots\,;\,Z;\,w\,-\,?}} = \begin{cases} \boldsymbol{R}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = v_0}, \\ \boldsymbol{S}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = v_1}, \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = v_{n-1}}, \end{cases}.$$

де $\boldsymbol{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}}$ – значення унітерма $\boldsymbol{w}$.

4.3) поглинання унітерма: $\overline{\boldsymbol{S;\,S\,;\,u\,-\,?}} = \boldsymbol{S}$;

$$\overline{\boldsymbol{S\,;\,S\,;\,\dots\,;\,S;\,w\,-\,?}} = \boldsymbol{S}.$$

4.4) вибору умови за двозначним умовним унітермом:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{R\,;\,S\,;\,u_1\,-\,?}}\,;\,\overline{\boldsymbol{R\,;\,S\,;\,u_2\,-\,?}}\,;\,\boldsymbol{u_3\,-\,?}} = \overline{\boldsymbol{R;\,S;}\,\overline{\boldsymbol{u_1\,-\,?\,;\,u_2\,-\,?;\,u_3\,-\,?}}}\,;$$

4.5) вибору умови за багатозначним умовним унітермом:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{R;\,S;\,\dots\,;\,Z\,;\,w_1\,-\,?}}\,,\,\overline{\boldsymbol{R;\,S;\,\dots\,;Z\,;\,w_2\,-\,?}}\,,\,\boldsymbol{u\,-?}} =$$

$$= \overline{\boldsymbol{R;\,S\,;\,\dots\,;\,Z\,;\,w_1\,-\,?}} = \overline{\boldsymbol{R;\,S\,;\,\dots\,;\,Z\,;\,w_2\,-\,?}}\,.$$

4.6) поглинання унітерма за двозначним умовним унітермом:

$$\overline{\boldsymbol{A\,;\,}\overline{\boldsymbol{B\,;\,C\,;\,u\text{-}?}}\boldsymbol{\,;\,u\text{-}?}} = \overline{\boldsymbol{A;\,C;\,u\,-\,?}},$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A\,;\,B\,;\,u\text{-}?}}\boldsymbol{\,;\,C\,;\,u\text{-}?}} = \overline{\boldsymbol{A\,;\,C\,;\,u\,-\,?}}\,,$$

$$\overline{A ; \overline{A; B ; u_2 - ?}; u_1 - ?} = \overline{A ; \overline{(u_1 = 1) - ? ; B ; u_2 - ?}; u_1 - ?}$$

$$\overline{\overline{B ; A ; u_2 - ?} ; A ; u_1 - ?} = \overline{\overline{B ; (u_1 = 0) - ? ; u_2 - ?} ; A , u_1 - ?}$$

4.7) поглинання унітермів за багатозначним умовним унітермом:

$$\overline{\overline{A ; B ; \ldots ; Z ; w - ?} ; C; K; \ldots ; M ; w - ?} =$$

$$= \overline{A ; C ; K ; \ldots ; M ; w - ?} ,$$

$$\overline{A ; B; \ldots ; Z ; \overline{Q ; L ; \ldots ; M ; w - ?} ; w - ?} =$$

$$= \overline{A ; B ; \ldots ; Z ; M ; w - ?} .$$

4.8) дистрибутивності:

а) $\left|\begin{array}{c}\overset{\frown}{R : S}\\ ;\\ \overset{\frown}{R : T}\\ ;\\ u - ?\end{array}\right. = R : \left|\begin{array}{c}S\\ ;\\ T\\ ;\\ u - ?\end{array}\right.$ в) $\left|\begin{array}{c}\overset{\frown}{S : R}\\ ;\\ \overset{\frown}{T : R}\\ ;\\ u - ?\end{array}\right. = \left.\begin{array}{c}S\\ ;\\ T\\ ;\\ u - ?\end{array}\right| : R$

с) $\underline{\left(\begin{array}{c}A\\ ;\\ \overline{B; C; u_1 - ?}\end{array}\right. ; \left(\begin{array}{c}D\\ ;\\ \overline{B; C ; u_2 - ?}\end{array}\right. ; u_3 - ?} = \left(\begin{array}{c}\overline{A ; D ; u_3 - ?}\\ ;\\ \overline{B ; \underline{C ; u_1 - ? ; u_2 - ? ; *}}\end{array}\right.$

називається **елімінуванням**.

Означення 5. Операція яка має властивості:

5.1) поглинання унітерма: $\boxed{S , S} = S ;$

5.2) поглинання порожнього унітерма: $* , \boxed{S \;\; = S};$

5.3) комутативності: $\boxed{R, S} = \boxed{S , R};$

5.4) асоціативності: $\boxed{\boxed{S : R} : T} = \boxed{S : \boxed{R : T}};$

5.5) виносу унітерма:

$$\overline{\begin{pmatrix} R: \\ : \\ S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R \\ : \\ T \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} R \\ : \\ \boxed{S : T} \end{pmatrix}, \quad \overline{\begin{pmatrix} R\ : \\ : \\ S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ : \\ S \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{R : T} \\ : \\ S \end{pmatrix},$$

називається **паралеленням**.

Означення 6. Операція, яка має властивості:

6.1) перестановки унітермів секвенції: $\overset{\frown}{\boldsymbol{R : S}} = \overset{\frown}{\boldsymbol{S : R}}$

6.2) перестановки унітермів елімінування з двозначним унітермом:

$$\overline{\boldsymbol{R; S;\ u\text{-}?}} = \overline{\boldsymbol{S;\ R; u\text{-}?}} = \overline{\boldsymbol{R ; S ; \bar{u} - ?}}\ ;$$

6.3) перестановки унітермів елімінування з багатозначним унітермом:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{R ; S ; \ldots ; Z; w - ?}}} = \overline{\boldsymbol{R ; S ; \ldots ; Z; \bar{w} - ?}}\ .$$

$$\overline{\boldsymbol{R ; S ; \ldots ; Z\ \ w - ?}} = \overline{\boldsymbol{Z ; \ldots ; S ; R , \bar{w} - ?}}\ .$$

$$\overline{\boldsymbol{R ; S ; \overline{\ldots} ; Z; w - ?}} = \begin{cases} \boldsymbol{R}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = v_{n-1}}, \\ \boldsymbol{S}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = v_{n-2}}, \\ . \\ . \\ . \\ \boldsymbol{Z}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = v_0}\ . \end{cases}$$

6.4) перестановки унітермів паралелення: $\overline{\boldsymbol{R : S}} = \overline{\boldsymbol{S : R}}$,

називається **реверсуванням**.

Означення 7. Операції, які мають властивості:

7.1) інвертування зв'язаної змінної:

$$\overline{\not\subset \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A_x}} = \not\subset \overline{\boldsymbol{x}}\ \overline{\boldsymbol{A_x}},\ \overline{\not\supset \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A_x}} = \not\supset \overline{x}\, \overline{\boldsymbol{A_x}},\ \ \overline{\boldsymbol{\varnothing\, x\, A_x}} = \boldsymbol{\varnothing}\, \overline{\boldsymbol{x}}\ \overline{\boldsymbol{A_x}}\ ,$$

де $\boldsymbol{x}$- зв'язана змінна, а $\boldsymbol{A_x}$ - унітерм, який є областю дії операцій;

7.2) порожній цикл:

$$\not\supset \qquad \not\subset \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{*_x} = \quad \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{*_x} = \ \boldsymbol{\varnothing\, x}\ \boldsymbol{*_x} = \boldsymbol{*},$$

називаються циклічними секвентуванням ($\not\subset$), $\not\supset$

елімінуванням ($\not\supset$) і паралеленням ($\varnothing$).

4. ІНДУКЦІЙНА ДЕФІНІЦІЯ АЛГОРИТМУ

Означення 8. 1.Якщо $\boldsymbol{S}$ та $\boldsymbol{R}$- унітерми, то $\overset{\frown}{\boldsymbol{S : R}}$ та $\overline{\boldsymbol{S : R}}$ алгоритми.

2. Якщо $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$- унітерми або алгоритми, а $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ – унітерми умов, то

$$\overline{A; B ; u- ?}\ ,\ \ \overline{B ; A ; u- ?}\ \text{і}\ \overline{A; B; \dots :Z; w - ?}\ \ \text{- алгоритми.}$$

3.Якщо $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$- унітерми або алгоритми, то

$$\overline{A}, \overline{B}\ ,\ \ \overset{\frown}{A : B}, \overline{\overline{A : B}}\ \text{і}\ \ \overline{\overline{A; B ; u- ?}}\ \text{та}\ \overline{\overline{B ; A ; u- ?}}\ ,$$

$$\overline{\overline{Q, L, \dots , T; w - ?}}\ ,\ \ \overline{Q, L, \dots , T; \overline{w} - ?}\ ,$$

є алгоритми.

4. Якщо $\boldsymbol{A_x}$ є унітермом або алгоритмом, $\boldsymbol{x}$ – змінна, то

$$\not\subset x\, A_x,\ \not\supset x\, A_x\ ,\ \ \varnothing\, x\, A_x\ \text{та}\ \overline{\varnothing\, x\, A_x}\ , \overline{\not\subset x\, A_x}\ ,\ \ \overline{\not\supset x\, M_x}\ ,$$

є алгоритмами.

5. Якщо $\boldsymbol{F, R, S}$ – унітерми або алгоритми і $\boldsymbol{F = R}$, а $\boldsymbol{R = S}$, то $\boldsymbol{F = S}$ – алгоритм.

6. Тільки той вираз є алгоритмом для якого це можна показати застосувавши скінчену кількість раз пункти 1- 5.

Розширена алгебра алгоритмів – система операцій рівності, секвентування, елімінування, паралелення, реверсування і циклічних операції над унітермами, у тому числі багатозначними умовними унітермами, та алгоритмами.

4. ЗВ'ЯЗОК МІЖ КЛАСИЧНОЮ І РОЗШИРЕНОЮ ОПЕРАЦІЄЮ ЕЛІМІНУВАННЯ

Теорема. Якщо $\boldsymbol{w = a}$ при $\boldsymbol{u_1 = 1}$ і $\boldsymbol{u_2 = 1}$, а $\boldsymbol{w = b}$ при $\boldsymbol{u_1 = 1}$ і $\boldsymbol{u_2 = 0}$, та $\boldsymbol{w = c}$ при $\boldsymbol{u_1 = 0}$, то має місце рівність

$$\overline{\overline{A; B; u_2 - ?}\ ; C; u_1 - ?} = \overline{A; B; C; w - ?}$$

Доведення. На підставі аксіоми вибору унітерма за двозначним умовним унітермом (4.1) з елімінування за умовою $\boldsymbol{u_1}$ отримуємо:

$$\overline{\overline{A; B; u_2 - ?}\ ; C; u_1 - ?} = \begin{cases} \overline{A; B; u_2 - ?}\ , & \text{якщо}\ u_1 = 1; \\ C, & \text{якщо}\ u_1 = 0; \end{cases} \qquad (1)$$

З елімінування за умовою ,на підставі цієї ж самої аксіоми, отримуємо такий вираз:

$$\overline{\boldsymbol{A ; B ; u_2 - ?}} = \begin{cases} \boldsymbol{A}, \textit{якщо } \boldsymbol{u_2 = 1}; \\ \boldsymbol{B}, \textit{якщо } \boldsymbol{u_2 = 0}; \end{cases}$$

Підставивши його ліву часину у формулу (1), замість елімінування за умовою , отримаємо:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A; B; u_2 - ?}}\ \boldsymbol{; C; u_1 - ?}} = \begin{cases} \boldsymbol{A}, \text{ якщо } \boldsymbol{u_1 = 1} \text{ і } \boldsymbol{u_2 = 1}; \\ \boldsymbol{B}, \text{ якщо } \boldsymbol{u_1 = 1} \text{ і } \boldsymbol{u_2 = 0}; \\ \boldsymbol{C}, \text{ якщо } \boldsymbol{u_1 = 0}. \end{cases} \qquad (2)$$

Тепер, з аксіоми вибору унітерма за багатозначним умовним унітермом (4.2), отримуємо:

$$\overline{\boldsymbol{A; B; C;\ w - ?}} = \begin{cases} \boldsymbol{A}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = a}, \\ \boldsymbol{B}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = b}, \\ \boldsymbol{C}, \text{ якщо } \boldsymbol{w = c}\ . \end{cases} \qquad (3)$$

За умовою теореми $\boldsymbol{w = a}$ при $\boldsymbol{u_1 = 1}$ і $\boldsymbol{u_2 = 1}$, а $\boldsymbol{w = b}$ при $\boldsymbol{u_1 = 1}$ і $\boldsymbol{u_2 = 0}$, та $\boldsymbol{w = c}$ при $\boldsymbol{u_1 = 0}$. На підставі цього є очевидним, що ліві, відносно знаку дорівнює, частини формул (2) і (3) є збіжними. У такому разі і праві частини цих виразів є збіжними, тобто

$$\overline{\overline{\mathrm{A; B; u_2 - ?}}\ \mathrm{; C; u_1 - ?}} = \overline{\mathrm{A; B; C; w - ?}}\ .$$

Теорему доведено.

6. ВИСНОВКИ

1. Записано всі відомі методи подання алгоритмів. Ними є вербальний і блок-схемний методи, віртуальних машин Поста, Тюрінга, Колмогорова, Ахо-Ульмана-Хопкрофта, Шонхаґе, рекурсивних функцій, алгоритмів Маркова, універсальних алгоритмів Крініцкого та алгебра алгоритмів.

2. Асіоматичним методом введено розширення класичної алгебри алгоритмів, яка, єдина серед всіх відомих методів, забезпечує формальний опис алгоритмів.

3. Встановлено взаємозв’язок між елімінуванням з двозначним умовним унітермом та елімінуванням з багатозначним умовним унітермом.

4. Як це показано у доведенні теореми використання елімінування з багатозначним умовним унітермом суттєво спрощує формули алгоритмів і робить їх більш наочними.

2. 1. E.L.Post: Finite Combinatory Processes - Formulation 1. Journal of Symbolic Logic, 1, pp. 103-105, 1936. Reprinted in The Undecidable, pp. 289 ff. 2. A.M.Turing.: On computable numbers, with an application to the Entscheidungs-problem. Proceedings of London Mathematical Society, series 2, vol. 42 (1936-1937), pp. 230-265; correction, ibidem, vol. 43, pp. 544-546. Reprinted in [13 Davis M., pp. 155-222] and available online at http://www.abelard.org/ turpap2/ tp2-ie.asp *3. A.V.Aho, J.E.Hopcroft, J.D.Ullman: The design and analysis of computer algorithms. Addison-Wesley Publishing Company, 1974. 4. A.Schön-hage: Universelle Turing Speicherung. In J. Dörr and G. Hotz, Editors, Automatentheorie und Formale Sprachen, Bibliogr. Institut, Mannheim, 1970, pp. 369-383.* 5. A.Church: An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics, vol. 58 (1936), pp. 345-363. 6. A.A.Markov: Theory of algorithms (in Russian). Editions of Academy of Sciences of the USSR, vol. 38, 1951, pp. 176-189; translated into English in American Mathematical Society Translations, 1960, series 2, 15, pp. 1-14. 7. A.N.Kolmogorov: On the concept of algorithm (in Russian). Uspekhi Mat. Nauk 8:4 (1953), pp. 175-176; translated into English in Uspensky V.A., Semenov A.L.: Algorithms: Main Ideas and Applications, Kluwer, 1993. 8. N.A.Krinitski: Algorithms around us (in Russian). Mir, Moscow, 1988; also translated to Spanish (Algoritmos a nuestro alrededor). 9. W.Owsiak, A.Owsiak, J.Owsiak: Teoria algorytmów abstrakcyjnych i modelowa-nie matematyczne systemów informacyjnych. Opole: Politechnika Opolska, 2005. 10. М.Мак-Дональд. WPF: Windows Prezentation Foundation в NET 3/5 с примерами на 2008 для профессионалов. Москва, Санки-Петербург, Киев: "И.Д.Вильямс". 2008. - 928с.*