УДК 621.39
© В. Попов[1], 2010

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В РЕДКОЛЕСЬИ (ПРИБЛИЖЕНИЕ РЫТОВА)

Запропонована математична модель розповсюдження радохвиль в рідколіссі на основі методу наближення Ритова.

The mathematical model of distribution of radokhvil' is offered in ridkolissi on the basis of method of approaching of Ritova.

1. ВВЕДЕНИЕ

Главными причинами изменения уровней электромагнитных волн, распространяющихся сквозь лесные массивы, в точке приема являются [1]:

– процессы рассеяния и дифракции на элементах структуры деревьев, что приводит к флуктуациям амплитуды и фазы радиосигнала, к изменению его спектра при ветровых нагрузках на деревья;

– результирующее электромагнитное поле в точке приема представляет собой интерференционное поле, рассеянными составляющими которого являются:

– рассеянные после дифракции компоненты поля;

– рассеянные после многократных отражений от элементов деревьев составляющие;

– возникающие дополнительные (например, ортогональные) составляющие электромагнитного поля, приводящие к кросс-поляризации принимаемого сигнала;

– изменение плотности лесных массивов с изменением времени года, приводящее к изменению эффективного значения сечения рассеяния;

– изменение влажности леса с изменением погодных условий, положения элементов деревьев в зависимости от ветровой нагрузки, приводящие к флуктуациям поля;

– положение мобильной станции MS относительно BTS и лесного массива и пр.

Для полного описания процессов распространения радиоволн внутри лесных массивов, помимо детерминированных методов, необходим статистический подход, учитывающий сложные процессы рассеяния и поглощения статистически распределенными в лесах деревьями и их элементами.

---

[1] Рижский институт железнодорожного транспорта, г.Рига, Латвия

Даже для самого простейшего случая, а именно для распространения плоской монохроматической электромагнитной волны в лесу, построение математической модели, описывающей изменение амплитуды и фазы в пространстве и во времени достаточно сложное, т.к. в электромагнитной волне составляющие векторы $\vec{E}(r,t)$ и $\vec{H}(r,t)$ имеют когерентное (среднее) поле и некогерентное (флуктуационное) поле (при этом во времени могут наблюдаться медленные и быстрые флуктуации, а по уровню – слабые или сильные изменения).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При малых объемных концентрациях элементов леса возможно использование приближения Рытова, в котором эффективная диэлектрическая проницаемость $\dot{\varepsilon}$ m неоднородной среды является функцией от пространственных координат при условии её постоянства во времени $\dot{\varepsilon}(r) \mid t = const$, при этом лес может быть представлен как линейная статистически неоднородная среда, эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость которой имеет медианное $\langle \varepsilon m \rangle$ значение и возмущение $\varepsilon 1$ (r,t) первого порядка малости за счет случайно расположенных деревьев.

Пусть эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость лесного массива (редколесья) будет выражаться в виде :

$$\varepsilon m = \langle \varepsilon m \rangle + \varepsilon 1 (r,t), \tag{1}$$

где $\langle \varepsilon m \rangle$ - медианное (среднее) ее значение, $\varepsilon 1(r,t)$ – ее флуктуирующая часть (при допущении, что неоднородная среда диамагнитна $\mu r=1$).

Тогда коэффициент преломления такой среды запишется в виде:

$$n(r,t) = \langle n \rangle + n1(r,t), \tag{2}$$

где $\langle n \rangle = \sqrt{\langle \varepsilon_m \rangle}$ - медианное значение коэффициента преломления, n1(r,t) – его флуктуирующая часть, зависящая от $\varepsilon 1$ (r,t).

Таким образом, в лесном массиве, как в среде со случайно расположенными неоднородностями, эффективная относительная комплексная диэлектрическая проницаемость εm и показатель преломления n меняются от точки к точке и эти изменения практически непредсказуемы. Более того, даже если бы они и были известны, практически невозможно описать их значения во всех точках пространства в произвольный момент времени. Поэтому параметры среды необходимо описывать статистически и искать статистические закономерности изменения составляющих электромагнитной волны в такой среде.

Допустим, что монохроматическая электромагнитная волна является плоской {Ez, Hx, Sy} и распространяется вдоль координаты Y. (рис.1).

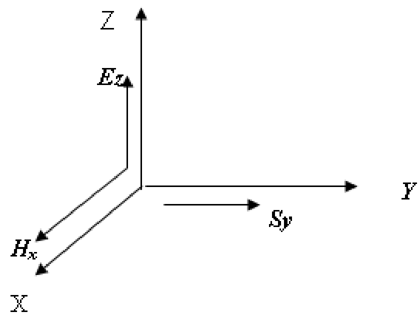

Рис. 1. Направление составляющих векторов плоской электромагнитной волны

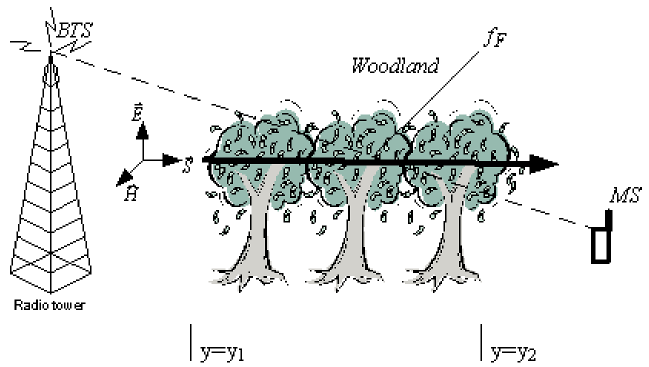

Рис. 2. Распространение плоской монохроматической. электромагнитной волны в лесном массиве (редколесьи)

Пусть n2(r,t) = <n> 2+2<n> · n1(r,t) + n12 (r,t) =<n> 2(1+2δn) , (3)
где

2δn={(2· n1(r,t)/ <n>) + [n12(r,t)/ <n>]} - (4)

флуктуирующая часть коэффициента преломления.

Взяв операцию ротора от второго уравнения Максвелла, записанного для плоской монохроматической электромагнитной волны:

$$\mathrm{rotrot}\ E(\ r\ ) - \omega 2\varepsilon 0\ \mu 0\ \varepsilon r\ (\ r\ )\ E(\ r\ ) = 0, \qquad (5)$$

$\nabla\ 2\ E\ (\ r\ ) + \omega 2\varepsilon 0\ \mu 0\ \varepsilon r\ (\ r\ )\ E(\ r\ ) - \nabla\ ([\nabla\varepsilon r\ (\ r\ )/\ \varepsilon r\ (\ r\ )]E\ (\ r\ ) = 0,\quad (6)$

при допущении $\nabla\varepsilon r\ (\ r\ ) \approx 0$,

уравнение (6) запишется в виде:

$\nabla\ 2\ E\ (\ r\ ) + \omega 2\varepsilon 0\ \mu 0\ \varepsilon r\ (\ r\ )\ E(\ r\ ) = 0$,

при $\omega 2\varepsilon 0\ \mu 0\ \varepsilon r\ (\ r\ )= k02\ n2\ (\ r\ )$,

где k0 – волновое число (для воздуха), n (r)]- коэффициент преломления неоднородной среды, получим:

$$[\nabla\ 2 + k02\ n2\ (\ r\ )]\ E(\ r\ ) = 0, \qquad (7)$$

Так как для плоской монохроматической электромагнитной волны вектор напряженности электрического поля имеет только одну составляющую –E(r)= Ez(y),

тогда уравнение (7) будет иметь вид:

$$[\nabla\ y\ 2 + k02\ n2\ (\ y\ )]\ Ez(\ y\ ) = 0, \qquad (8)$$

Итак, получено неоднородное волновое уравнение с изменяющимся в пространстве коэффициентом преломления n(y).

Для его решения воспользуемся приближением Рытова [2].

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ РЫТОВА

Нормированное распределение электрического поля в пространстве Ez(y) можно записать в виде Ez(y)=eψ(y) и искать решение для функции ψ(y) в уравнении (8) в виде ряда.

В случае слабых флуктуаций n(y) обычно ищется приближенное решение уравнения (8) для малых значений коэффициента преломления n. путем разложения в ряд по показателям экспоненты:

$$E = \exp\left(\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \ldots\right). \qquad (9)$$

где exp ψ0 – падающая на лес электромагнитная волна, exp ψ1 , exp ψ2 …- рассеянные в лесном массиве составляющие электромагнитного поля.

Приближенное решение уравнения (9) для малых значений n запишем в виде:

$$\left[\nabla^2\psi + (\nabla\psi)^2 + k_m{}^2(1 + 2\delta n)\right] = 0 \qquad (10)$$

где $km2=k02\cdot\langle n\rangle 2$ –среднее значение эффективного волнового числа для электромагнитной волны, распространяющейся в лесу.

Уравнение (10) является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка (уравнением Риккати) относительно ∇ψ .

1) В отсутствие флуктуаций (δn = 0) это уравнение (10) приводится к виду:

$$\left[\nabla^2\psi_0 + (\nabla\psi_0)^2 + k_m{}^2\right] = 0 \ , \qquad (11)$$

из которого следует решение для волны, распространяющейся в свободном пространстве Ez0(y)=exp ψ0(y)..

Найдем решение уравнения (10):

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + k_m{}^2(1+2\delta n) = 0 \ , \qquad (12)$$

при следующем допущении: пусть $k_m{}^2(1+2\delta n)$=a2 (a≈const), т.е. при таком допущении можно получить уравнение, в котором появляется возможность понижения степени производной :

$$\psi'' + (\psi')^2 + a^2 = 0 \qquad (13)$$

Представим первую производную функции ψ(y) в виде - $\psi' = \xi(y)$, тогда получим уравнение :

$$\xi' + \xi^2 + a^2 = 0 \qquad (14)$$

с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\xi}{dy} = -\left(\xi^2 + a^2\right), \quad \frac{d\xi}{\xi^2 + a^2} = -dy \ .$$

Интегрируя $\int \frac{d\xi}{\xi^2 + a^2} = -\int dy$, получим $\frac{1}{a} arctg \frac{\xi}{a} = -y + c_1$,

(где интегральная константа c1=const), тогда $arctg \frac{\xi}{a} = a(c_1 - y)$,

$$\frac{\xi}{a} = tga(c_1 - y), \text{ т.е. } \xi = a \cdot tg[a(c_1 - y)].$$

Возвращаясь к первой производной функции ψ′, получим:

$$\psi' = a \cdot tg[a(c_1 - y)] \qquad (15)$$

Это уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\psi}{dy} = a \cdot tg[a(c_1 - y)], \ d\psi = a \cdot tg[a \cdot (c_1 - y)]dy \ ,$$

интегрируя $\int d\psi = \int a \cdot tg[a \cdot (c_1 - y)]dy$, получим:

$$\psi(y) = a\int \frac{\sin a(c_1 - y)}{\cos a(c_1 - y)} dy = \int \frac{d\cos a(c_1 - y)}{\cos a(c_1 - y)} = \ln\left|\cos[a(c_1 - y)]\right| + c_2 \ ,$$

(где интегральная константа c2=const).

Таким образом, для малой постоянной величины $k_m{}^2(1+2\delta n)$=a2 (a=const) приближение Рытова, а именно, степень функции eψ(r) определится в виде:

$$\psi = \ln\left|\cos[a(c_1 - y)]\right| + c_2 \tag{16}$$

или

$$\psi = \ln\left|\cos[(k_m\sqrt{1+2\delta n}(c_1 - y))]\right| + c_2 \tag{17}$$

Аналогично решается уравнение (11), при этом его решение имеет вид:

$$\psi_0 = \ln\left|\cos\left(k_m\left(c_1' - y\right)\right)\right| + c_2'' \tag{18}$$

где интегральные константы c1' и c2'' .

Таким образом, при найденных ψ и ψ0, мы получаем нормированные:

- Ez0(r)=eψ0(r) - напряженность электрического поля в отсутствии флуктуаций и Ez(y)=eψ(y) – напряженность электрического поля, учитывающую флуктуации эффективного коэффициента преломления среды.

Как показывает численный расчет (рис. 3 и 4), при изменении аргумента X в пределах от +0 до +10 , изменение нормированных функций Ez0(r)=eψ0(r) и Ez(y)=eψ(y) , имеет колебательный характер, зависящий от характеристик лесной растительности, при этом изменение напряженности электрического поля с расстоянием имеет вид затухающих колебаний (рис. 4).

В полученных решениях (17) и (18) не определены интегральные константы, значения которых будут зависеть от границ лесного массива (рис.1), т.е. изменения поля в пределах от y=y1 до y=y2.

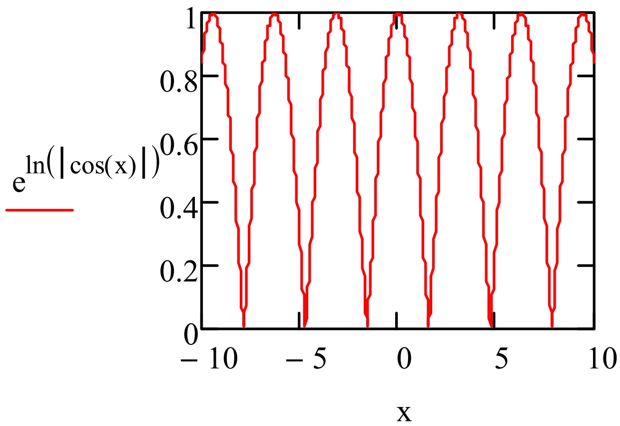

Рис. 3

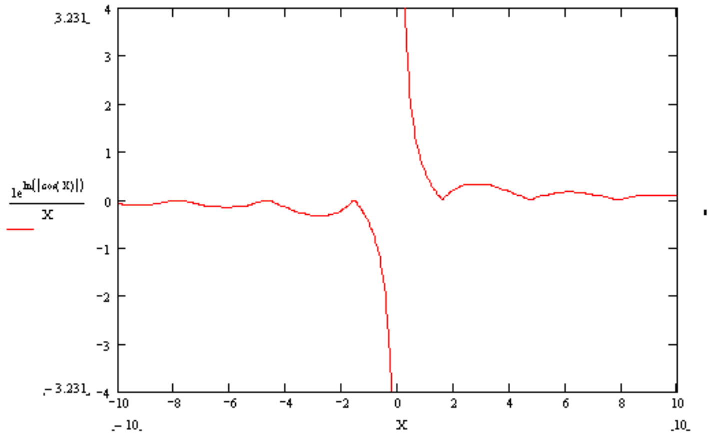

Рис. 4.

Так, при y=y1, для падающей на лесной массив электромагнитной волны значения интегральных констант c1 и c2 будут равны нулю и, таким образом, флуктуирующее поле будет отсутствовать (что соответствует физической реализуемости).

При у=у2 значения интегральных констант для флуктуирующей (некогерентной) составляющей в принципе не определено, с точки зрения физики процессов, эти константы должны приводить к уменьшению уровня напряженности электрического поля при сохранении колебательной динамики. Для когерентной составляющей интегральные константы, с точки зрения физической реализуемости, должны быть приняты равными нулю, что должно свидетельствовать о затухающем колебательном характере изменения уровня напряженности электрического поля.

3) В общем случае уравнение (10) является неоднородным волновым уравнением, которое можно свести к интегральному уравнению относительно флуктуирующей части [2] :

$$\psi_1(y) = [1/E_{z0}(y)]\int_{V'} G(y-y')[\nabla\psi_1 \cdot \nabla\psi_1 + k_m{}^2 \cdot 2\delta n) \cdot E_{z0}(y')dV' \qquad (19)$$

где координата у' и объем V' находятся в произвольной точке лесного массива.

Использование метода итераций [2] , позволяет найти первое приближение Рытова (которое широко используется в теории слабых флуктуаций) :

$$\psi_{10}(y) = [1/E_z(y)]\int_{V'} G(y-y')\delta n(y')E_{z0}(y')dV' \qquad (20)$$

Таким образом, первое приближение Рытова можно записать в виде:

$$Ez(y) = \exp(\psi0 + \psi10) = Ez0(y) \cdot \exp[\psi10(y)] \qquad (21)$$

т.е. напряженность поля в точке приема, расположенной в лесном массиве, будет определяться амплитудой когерентной составляющей Ez0 (у)(зависящей от текущей координаты) и изменяться по закону exp [ψ10 (у)] - учитывающему слабую некогерентность поля.

4. ВЫВОДЫ

Приближения Рытова позволяют оценить как когерентную составляющую радиосигнала, распространяющегося в лесных массивах при их малых плотностях, когда флуктуации эффективного значения показателя преломления являются величинами первого порядка малости, а сам лесной массив является неоднородной слабодисперсной средой со статистически расположенными неоднородностями (деревьями), так и некогерентные составляющие, возникающие за счет случайного изменения диэлектрической проницаемости (коэффициента преломления) неоднородной среды вдоль трассы распространения (рис. 5).

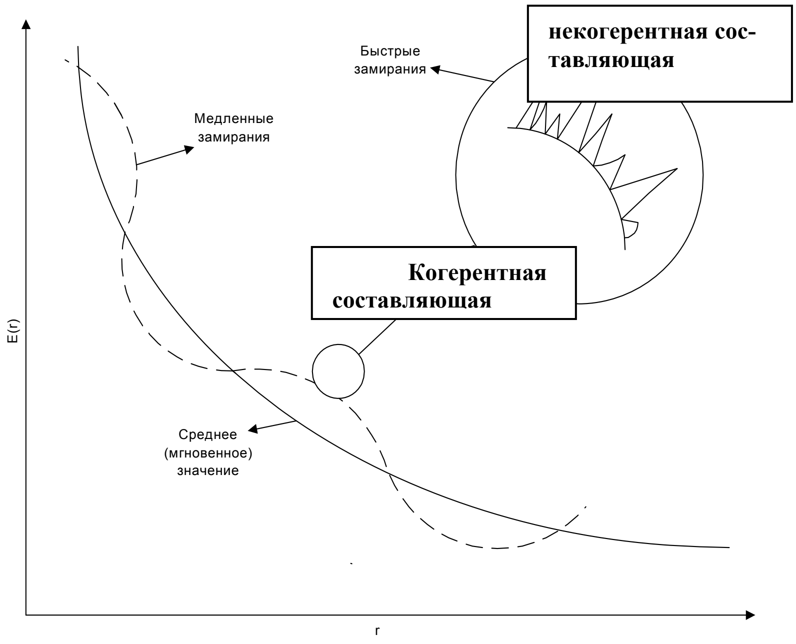

Рис. 5.

1. Попов В.И. Распространение радиоволн в лесах. Отчет по НИР № 3566/3731. Львов: Львовский политехнический институт, кафедры теоретической радиотехники и автоматической электросвязи, 1981/1983. – 122 с. 2. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т.2 М.: Мир, 1981. 3. Попов В.И. Основы сотовой связи стандарта GSM. М.: Эко-Трендз, 200. – 296 с. 4. PopovsV. UHF radio wave propagation through woodlands in cellular mobile communication systems. In: 44nd. International Scientific Conference. October 11-13, 2003, Riga: Scientific proceedings of Riga Technical University, Transport and Engineering, Railway Transport, Sērija 6, Sējums 12, 2004. 5. Popovs V. Mathematic model of VHF wave propagation in woodlands. In: 48nd. International Scientific Conference. October, 2007, Riga: Scientific proceedings of Riga Technical University, Transport and Engineering, Railway Transport, Sērija 6, Sējums 25, 2007.