УДК 519.65
© *В. Андруник*[1], *П. Малачівський*[2], *2010*

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ СУМОЮ ПОЛІНОМУ Й СТЕПЕНЯ З ЕРМІТОВИМ ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ У КРАЙНІХ ТОЧКАХ ВІДРІЗКА

Встановлено достатні умови існування чебишовського (рівномірного, мінімаксного) наближення функції сумою поліному та степеня з найменшою абсолютною похибкою й ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Запропоновано алгоритм визначення параметрів такого наближення за схемою Ремеза. Обґрунтовано застосування ітераційного методу для уточнення показника степеня.

There are established the sufficient conditions for existence of Chebyshev (uniform, minimax) approximation of function by sum of a polynomial and degree, for the case of minimizing absolute error and Hermite interpolating at the end points of interval. The algorithm for determining the parameters of such approximation using Remez scheme is proposed. The application of iterative method to calculation of value the index of degree is proved.

1. ВСТУП

Складність чебишовського наближення сумою поліному та степеня

$$C_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + Ax^p\,, \quad x\ge 0\,, \quad A\ne 0\,, \quad p\ne k \ \left(k=\overline{0,n}\right) \tag{1}$$

з невідомими параметрами a_i $\left(i=\overline{0,n}\right)$, A і p зумовлена тим, що таке наближення не завжди існує, а в разі його існування обчислення показника степеня досить трудомістке.

Вираз (1) використовується для опису залежностей фізичних величин [1] і спеціальних функцій [2]. Властивості чебишовського наближення сумою поліному та степеня (1) з інтерполюванням досліджено в праці [3], в цій статті встановлено достатні умови існування та характеристичну властивість чебишовського наближення виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою й відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка. Чебишовське наближення функцій з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка використовується для побудови неперервних і гладких мінімаксних сплайн-наближень [4].

[1] Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,
[2] Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

2. ІСНУВАННЯ Й ХАРАКТЕРИСТИЧНА ВЛАСТИВІСТЬ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ СУМОЮ ПОЛІНОМУ Й СТЕПЕНЯ З ВІДТВОРЕННЯМ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ПОХІДНОЇ В КРАЙНІХ ТОЧКАХ ВІДРІЗКА

Розглянемо неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$, що справджують нерівності

$$W^{(n)} > 0\ , \qquad W^{(n)} \neq W_r^{(n)}\ , \qquad r = \overline{0,\ n}\ , \tag{2}$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f;\ z_2,\ z_3,...,\ z_{n+4})}{D_{n+1}(f;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3})}\ , \tag{3}$$

$$W_r^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z_1 = 0, \\ \dfrac{D_{n+1}(l_r;\ z_2,\ z_3,...,\ z_{n+4})}{D_{n+1}(l_r;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3})}, & \text{якщо} \quad z_1 > 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$l_k(x) = x^k \ln(x), \qquad s_k(x) = x^k\ ,$$

$$\begin{aligned} D_k(U;\, z_j, z_{j+1},..., z_{j+k+1}) &= \frac{D_{k-1}(U;\ z_{j+1}, z_{j+2},..., z_{j+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1};\, z_{j+1}, z_{j+2},.., z_{j+k+1})} - \\ &- \frac{D_{k-1}(U; z_j,\, z_{j+1},..., z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_j, z_{j+1},..., z_{j+k})}, \quad k = \overline{3,\ n+1}, \quad j = \overline{1,\, n-k+3}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$D_2(U; z_j,..., z_{j+3}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U;\, z_2, z_4)}{D_1(s_1;\, z_2, z_4)} - U'(z_1), & \text{якщо} \quad j = 1; \\ \dfrac{D_1(U;\, z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \dfrac{D_1(U;\, z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, & \text{якщо} \quad 1 < j < n+1; \\ U'(z_{n+4}) - \dfrac{D_1(U;\, z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1;\, z_{n+1}, z_{n+3})}, & \text{якщо} \quad j = n+1, \end{cases} \tag{6}$$

$$D_1(U;\, z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U'(z_1), & \text{якщо} \quad j = 1; \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), & \text{якщо} \quad j = 2; \\ U(z_{j+2}) - U(z_j), & \text{якщо} \quad 2 < j \le n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), & \text{якщо} \quad j = n+1; \\ U'(z_{n+4}), & \text{якщо} \quad j = n+2, \end{cases} \tag{7}$$

$U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, z_i $\left(i = \overline{2,\ n+3}\right)$ – довільні, впорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ $\left(j = \overline{2,\ n+2}\right)$ числа з відрізку $[\alpha, \beta]$, $z_1 = z_2 = \alpha$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$.

Достатню умову існування чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку

$[\alpha,\ \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\ \beta]$, тоді достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою поліному й степеня (1) при $(n \geq 2)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і відтворенням значень функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка α і β є справдження нерівностей (2).

У випадку виконання умови (2) існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою поліному й степеня (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка, а його параметри задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(\alpha) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \alpha^i - A\alpha^p = 0, \quad f'(\alpha) - \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i \alpha^{i-1} - Ap\alpha^p = 0, \\ f(z_j) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A z_j^p = (-1)^j \mu, \quad j = \overline{3,\ n+2}, \\ f(\beta) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \beta^i - A\beta^p = 0, \quad f'(\beta) - \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i \beta^{i-1} - Ap\beta^p = 0, \end{cases} \tag{8}$$

в якій z_j $(j = \overline{3,\ n+2})$ – впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу з інтервалу (α, β).

Доведення. Сума поліному й степеня (1) для значень параметра p відмінних від $0, 1, ..., n$ задовольняє умову теореми щодо існування чебишовського наближення сумою поліному й нелінійного виразу з ермітовим інтерполюванням [5]. На підставі цієї теореми достатньою умовою існування чебишов–ського наближення виразом (1) з від'ємним значенням параметра p неперервно диференційовної функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і відтворенням значень функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка є справдження нерівностей

$$0 < W^{(n)} < W_0^{(n)}. \tag{9}$$

Це випливає з того, що

$$\lim_{p \to -\infty} \omega_n(p) = 0, \qquad \lim_{p \to -0} \omega_n(p) = W_0^{(n)},$$

де

$$\omega_n(p) = D_{n+1}(\varphi;\ z_2,\ z_3,\ldots,\ z_{n+4}) / D_{n+1}(\varphi;\ z_1,\ z_2,\ldots,\ z_{n+3}),$$

величина $W_0^{(n)}$ визначається за формулою (4), значення виразів $D_k(U; z_i, z_{i+1},\ldots, z_{i+k+1})$ для $k=\overline{3,\ n+1}$, $j=\overline{1,\ n-k+3}$ – за формулою (5), а $D_2(U; z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3})$ і $D_1(U; z_i, z_{i+2})$ – за формулами (6) і (7).

Аналогічно, у випадку значень параметра p з інтервалів $p \in (j-1,\ j)$, $j=\overline{1, n}$ достатньою умовою існування чебишовського наближення виразом (1) функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і відтворенням значень функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка є справдження нерівностей

$$W_{j-1}^{(n)} < W^{(n)} < W_j^{(n)}, \qquad (10)$$

оскільки

$$\lim_{p \to j-1+0} \omega_n(p) = W_{j-1}^{(n)} \quad \text{і} \quad \lim_{p \to j-0} \omega_n(p) = W_j^{(n)}.$$

Якщо значення параметра p більше від n, то достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ й ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка сумою поліному та степеня зі значенням параметра p більшим від n є справдження нерівності

$$W^{(n)} > W_n^{(n)}. \qquad (11)$$

В цьому разі

$$\lim_{p \to n+0} \omega_n(p) = W_n^{(n)} \quad \text{і} \quad \lim_{p \to \infty} \omega_n(p) = \infty.$$

Отже, достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ й ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка виразом (1) зі значенням параметра p відмінним від 0, 1, ..., n є виконання однієї з нерівностей (9), (10) або (11), що еквівалентно умові (2). ***Теорему доведено.***

Подібні твердження справедливі також для чебишовського наближення виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в одній із крайніх точок відрізка α або β.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\ \beta]$, тоді достатньою умовою існування чебишовського наближення $f(x)$ сумою поліному й степеня (1) з найменшою абсолютною похибкою на $[\alpha,\ \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в крайній лівій точці відрізка α є справдження нерівностей (2), в яких значення виразів $D_k(U;z_i,z_{i+1},...,z_{i+k+1})$ для $k=\overline{3,\ n+1}$, $j=\overline{1,\ n-k+3}$ визначаються за формулою (5), а

$$D_2(U;z_j,...,z_{j+3})=\begin{cases}\dfrac{D_1(U;z_2,z_4)}{D_1(s_1;z_2,z_4)}-U'(z_1), & якщо\ \ j=1;\\ \dfrac{D_1(U;z_{j+1},z_{j+3})}{D_1(s_1;z_{j+1},z_{j+3})}-\dfrac{D_1(U;z_j,z_{j+2})}{D_1(s_1;z_j,z_{j+2})}, & якщо\ 1<j\le n+1;\end{cases} \tag{12}$$

$$D_1(U;z_j,z_{j+2})=\begin{cases}U'(z_1), & якщо\ \ j=1;\\ U(z_4)+U(z_3)-2U(z_2), & якщо\ \ j=2;\\ U(z_{j+2})-U(z_j), & якщо\ \ 2<j\le n+2;\end{cases} \tag{13}$$

$U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, z_i $(i=\overline{3,\ n+4})$ – довільні, впорядковані за зростанням $z_j<z_{j+1}$ числа з $(\alpha,\beta]$, $z_1=z_2=\alpha$.

У цьому випадку існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою поліному й степеня (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ і точним відтворенням значення функції та її похідної у точці α, а його параметри задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases}f(\alpha)-\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\alpha^i-A\alpha^p=0, \quad f'(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{n}ia_i\alpha^{i-1}-Ap\alpha^{p-1}=0,\\ f(z_j)-\sum\limits_{i=0}^{n}a_iz_j^i-Az_j^p=(-1)^j\mu, \quad j=\overline{3,\ n+4},\end{cases} \tag{14}$$

В якій z_j $(j=\overline{3,\ n+4})$ – впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу з $(\alpha,\beta]$.

Доведення. Доведення цієї теореми можна провести подібно до доведення теореми 1 на підставі теореми щодо існування чебишовського наближення сумою поліному й нелінійного виразу з ермітовим інтерполюванням [5].

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\ \beta]$, тоді достатньою умовою існування чебишовського наближення $f(x)$ сумою поліному й степеня (1) з найменшою абсолютною похибкою на $[\alpha,\ \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної в крайній правій точці відрізка β є справдження нерівностей (2), в яких значення виразів $D_k(U; z_i, z_{i+1}, ..., z_{i+k+1})$ для $k = \overline{3,\ n+1}$, $j = \overline{1,\ n-k+3}$ визначаються за формулою (5), а

$$D_2(U; z_j, ..., z_{j+3}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \dfrac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, \ \textit{якщо}\ 1 \le j < n+1; \\ U'(z_{n+4}) - \dfrac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, \quad \textit{якщо} \quad j = n+1, \end{cases} \tag{15}$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U(z_{j+2}) - U(z_j), \quad \textit{якщо} \quad 1 \le j \le n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), \quad \textit{якщо} \quad j = n+1; \\ U'(z_{n+4}), \quad \textit{якщо} \quad j = n+2, \end{cases} \tag{16}$$

$U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, z_i $\left(i = \overline{1,\ n+2}\right)$ – довільні, впорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з $[\alpha, \beta)$, $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$.

У цьому випадку існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою поліному й степеня (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної у точці β , а його параметри задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(z_j) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A z_j^p = (-1)^j \mu, \quad j = \overline{1,\ n+2}, \\ f(\beta) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \beta^i - A\beta^p = 0, \ \ f'(\beta) - \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i \beta^{i-1} - Ap\beta^{p-1} = 0, \end{cases} \tag{17}$$

в якій z_j $\left(j = \overline{1,\ n+2}\right)$ – впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу з $[\alpha, \beta)$.

Доведення. Доведення цієї теореми можна провести подібно до доведення теореми 1.

Розглянемо умову (2). Значення виразу $W^{(n)}$ співпадає з $W_r^{(n)}$ (r = 0, 1, ..., n) для функцій $f(x)$, що мають вигляд

$$b_0 + Bx^r \ln(x), \qquad x > 0, \tag{18}$$

де b_0 і B – будь-які дійсні числа.

В [5] встановлено, що нерівності $W^{(n)} > 0$ задовольняють функції $f(x)$, n-на похідна яких строго монотонна на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тому, достатній умові (2) існування чебишовського наближення сумою поліному та степеня (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ неперервно диференційовані до n-го порядку, n-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, за винятком функцій, що співпадають з виразом (18) для $r = \overline{0, n}$.

3. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ СУМОЮ ПОЛІНОМУ Й СТЕПЕНЯ З ВІДТВОРЕННЯМ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ПОХІДНОЇ В КРАЙНІХ ТОЧКАХ ВІДРІЗКА

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теорем 1, 2 та 3, то параметри $a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$ і A чебишовського наближення $f(x)$ сумою полінома й степеня (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка визначаються за формулами

$$A = D_{n+1}(f;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3}) / D_{n+1}(\varphi; z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3}); \qquad (19)$$

$$a_k = \frac{D_k(f;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{k+2}) - \sum_{i=k+1}^{n} a_i D_k(s_i;\ z_1, z_2,..., z_{k+2}) - AD_k(\varphi;\ z_1, z_2,..., z_{k+2})}{D_k(s_k;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{k+2})},$$

$$k = \overline{1,\ n}; \qquad (20)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(f(z_3) + f(z_4) - \sum_{i=1}^{n} a_i\left(z_3^i + z_4^i\right) - A\left(z_3^p + z_4^p\right)\right), \qquad (21)$$

в яких $\varphi(p; x) = x^p$, вирази $D_k(U; z_i, z_{i+1},..., z_{i+k+1})$ для $k = \overline{3, n+1}$, $j = \overline{1, n-k+3}$ визначаються за формулою (5), а $D_2(U; z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3})$ і $D_1(U; z_i, z_{i+2})$ залежно від точок інтерполювання − відповідно за формулами (6) та (7), (12) і (13) або (15) та (16).

Значення параметра p визначається як розв'язок рівняння

$$\omega_n(p) = W^{(n)}, \qquad (22)$$

де

$$\omega_n(p) = D_{n+1}(\varphi;\ z_2,\ z_3,...,\ z_{n+4}) / D_{n+1}(\varphi;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3}),$$

$\varphi(p; x) = x^p$, а значення $W^{(n)}$ визначається за формулою (5) з врахуванням точок ермітового інтерполювання.

Розв'язування рівняння (22) проводиться з врахуванням того, що у випадку справдження нерівності

$$W_0^{(n)} < W^{(n)} < W_n^{(n)}, \qquad (23)$$

його розв'язок знаходиться в одному з інтервалів $(k, k+1)$, де $k = 0, 1, ..., n-1$. Тому спочатку необхідно перевірити чи не попадає корінь рівняння в один із цих інтервалів. Якщо значення параметра p попадає в один з цих інтервалів, то його можна уточнити за методом хорд чи ділення навпіл. У протилежному випадку значення параметра p знаходиться в одному з інтервалів $(-\infty, 0)$ або (n, ∞).

З доведення теореми щодо існування чебишовського наближення сумою поліному й нелінійного виразу з ермітовим інтерполюванням [5] випливає, що ліва частина рівняння (22) для $\varphi(p;x) = x^p$ є степеневою функцією яка має такий вигляд

$$\omega_n(p) = K(\zeta_2/\zeta_1)^{p-n-1}, \tag{24}$$

де

$$K = \frac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \qquad \zeta_1 \in (z_1, z_{n+3}), \qquad \zeta_2 \in (z_2, z_{n+4}),$$

$$\tau_i \in (z_i,\ z_{i+n+1}).$$

Враховуючи степеневий характер залежності лівої частини рівняння (22) від p, його розв'язок доцільно шукати як корінь рівняння

$$g_n(p) = V^{(n)}, \tag{25}$$

$$\text{де } g_n(p) = \ln(\omega_n(p)),\ \ V^{(n)} = \ln\left(W^{(n)}\right).$$

Розв'язок рівняння (25) на інтервалах $(-\infty, 0)$ і (n, ∞) можна уточнити за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n(p_i) - V^{(n)}}{g_n'(p_i)}, \qquad i = 0, 1, 2, ... \tag{26}$$

де

$$g_n'(p) = \frac{D_{n+1}(\bar{\varphi}; z_2, z_3, ..., z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, ..., z_{n+4})} - \frac{D_{n+1}(\bar{\varphi}; z_1, z_2, ..., z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, ..., z_{n+3})}; \tag{27}$$

$$\bar{\varphi}(p;x) = x^p \ln(x); \qquad \varphi(p;z) = z^p;$$

$$p_0 = \begin{cases} -p^*, & \text{якщо } \ W^{(n)} < \widetilde{W}_0^{(n)}; \\ n+1+p^*, & \text{якщо } \ W^{(n)} > W_n^{(n)} \end{cases}; \tag{28}$$

$$p^* = \left|\ln W^{(n)}\right| \Big/ \left(\ln(z_{n+4} + z_2) - \ln(z_{n+3} + z_1)\right).$$

Початкове значення наближення p_0 (28) до шуканого кореня рівняння (25) визначено, виходячи з вигляду (24) лівої частини рівняння. В разі такого вибору значення p_0 його знак завжди співпадатиме зі знаком шуканого розв'язку. Співпадання знаків необхідне для забезпечення стійкості ітераційного методу (26), тому що функція $g_n(p)$ має розриви в точках $p = 0, 1, ..., n$ і перехід проміжних значень p_i через одну з цих точок може порушити збіжність методу (26). За такого вибору початкового значення p_0 знаки проміжних значень p_i (26) завжди будуть співпадати зі знаком шуканого розв'язку.

Попередня перевірка умови (23) і вибір початкового значення p_0 за формулою (28) забезпечують обминання згаданих точок розриву лівої частини рівняння (25) під час знаходження розв'язку рівняння (25) за ітераційною схемою (26). Запропоноване застосування комбінації ітераційних методів для розв'язування рівняння (22) забезпечує достатньо швидку їх збіжність, зокрема, ітераційний процес (26) для тестових прикладів збігався за три-чотири ітерації.

4. ВИСНОВОК

Достатньою умовою існування чебишовського наближення сумою поліному й степеня (1) неперервно диференційованої функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізку є виконання нерівностей (2), які залежать від точок інтерполювання. Цим нерівностям задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ $\left(f(x) \in C^n[\alpha, \beta]\right)$, *n*-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, за винятком функцій, що співпадають з (18) для $r = \overline{0, n}$. Параметри a_i $\left(i = \overline{0, n}\right)$ і A такого наближення визначаються за формулами (19)-(20). Значення параметра *p* є коренем трансцендентного рівняння (22), розв'язок якого залежно від виконання нерівностей (23) можна обчислити за ітераційною схемою (26) або ділення навпіл.

Чебишовське наближення з відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка використовується для побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближеня.

1. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами / Б. А. Попов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с. 2. Kobayashi, Y. Fractional power approximations of elliptic integrals and Bessel functions / Y. Kobayashi, M. Ohkita, M. Inoue // Math. Comput. Simulation. – 1978. – V. 20, No 4. – P. 285-290. 3. Скопецкий В. В. Чебышевское приближение функций суммой многочлена и выражения с нелинейным параметром и интерполированем в крайних точках отрезка / В. В. Скопецкий, П. С. Малачивский // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – Т. 45. – № 1. – С. 64-75. 4. Малачівський П. Неперервна апроксимація характеристики *термодіодного сенсора і його чутливості сумою многочлена й експоненти з нелінійним параметром / П. Малачівський // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2008. – № 69. – С. 84-89. 5. Скопецький В. В. Чебишовське наближення сумою многочлена й нелінійного виразу з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка / В. В. Скопецький, П. С. Малачівський // Доповіді НАН України. – 2010. – № 4. – С. 42-47.*