

НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ, ЩО ЗНАХОДЯТЬСЯ ПІД ДІЄЮ РУХОМОГО Л ОКАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

На основі розв'язку квазістатичної задачі термопружності для півпростору, який знаходиться під дією рухомого прямокутного джерела тепла, пропонується підхід до вивчення перехідного напружено-деформованого стану, що виникає в результаті імпульсної теплової обробки матеріалів. Цей підхід може бути застосований для моделювання лазерної теплової обробки.

The approach to the study of transitional tense strained state that appears as the result of the materials impulse heat processing has been suggested on the basis of the quasistatic problem solution of thermo-elasticity for half-space which is located under the movable rectangular heat source. This approach can be applied for modeling of laser heat processing.

1. ВСТУП

Характерною особливістю сучасної технології виготовлення деталей машин, приладів, апаратів і елементів конструкцій є те, що вона повинна забезпечити не тільки високу точність, продуктивність, технологічність, але і потрібну довговічність деталей в експлуатації. Цим вимогам відповідають нові технологічні процеси, що отримали назву імпульсної технології [1]. Фізична суть багатьох аспектів імпульсної обробки доволі складна і до кінця не розкрита [1]. Проте теоретичний аналіз температурних полів і напружень, що виникають при цій обробці, в поєднанні з експериментальними дослідженнями дозволяє глибше зрозуміти фізичну суть процесу і цілеспрямованіше управляти якістю оброблюваних виробів. До нових методів імпульсної обробки матеріалів, у яких використовуються рухомі локальні джерела тепла належать: лазерна обробка [5, 9] (див. рис. 1а) та фрикційно-зміцнююча (в тому числі шліфувальна, полірувальна) обробка [1, 10] (див. рис. 1б, 1в). До таких віднесемо поліграфічні процеси: лазерне гравірування формного циліндра [3, 11]; лазерне виготовлення друкарських форм різних способів друку [8, 14]; термообробка обладнань для виготовлення шліфувального інструменту з наперед заданими власти-

²⁶ Українська академія друкарства

² Національний лісотехнічний університет України

востями [13]; поверхнєве зміцнення швидкозношувальних деталей поліграфічних машин [13] та інші.

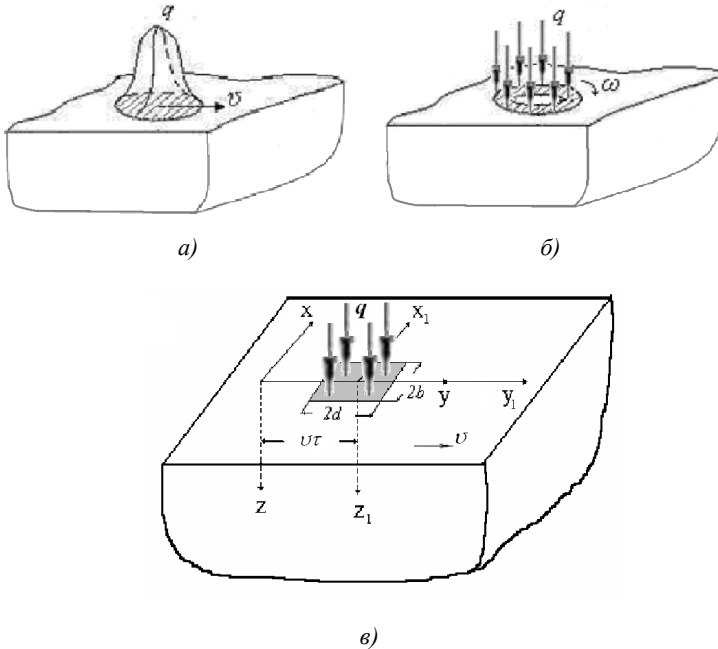


Рис. 1. Схема півпростору, що підігрівається локально по:
 а) рухомій круглій області; б) кільцевій області, що обертається;
 в) рухомій прямокутній області

У запропонованій роботі розглядається один з методів імпульсної обробки – фрикційно-зміцнююча обробка металів рухомим прямокутним джерелом тепла [1] (див. рис. 1в). У перспективі можна розглянути аналогічну задачу для лазерного теплового впливу [6] (див. рис. 1а). Ці два методи імпульсної обробки матеріалів з математичної точки зору подібні.

2. ПОСТАНОВКА І РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Фізична постановка задачі: розглядається вільний від зовнішнього навантаження півпростір $z \geq 0$ по поверхні $z = 0$ якого з постійною швидкістю v рухається джерело тепла прямокутної форми розміром $2b \times 2d$ (див. рис. 1в). Поза областю нагрівання поверхня вважається тепло ізолюваною, а початкова температура півпростору рівна T_0 .

Потрібно визначити розподіли температури та відповідних температурних напружень, що виникають у півпросторі.

Математична постановка: нестационарне температурне поле у півпросторі визначається розв'язком початково-крайової задачі теплопровідності [12]:

$$\Delta T = \frac{\dot{T}}{a}; \quad (1)$$

$$\partial_z T|_{z=0} = -Q\varphi(x, y, \tau), \quad T|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad T|_{\tau=0} = T_0, \quad (2)$$

де $T(x, y, z, \tau)$ – температурне поле в півпросторі, τ – час, $Q = q/\lambda$ – приведена густина джерела тепла, q – величина поверхневої густини теплового потоку; a, λ – відповідно, коефіцієнти температуро- і теплопровідності; b, d – розміри джерела тепла, $\varphi(x, y, \tau) = [S(x+b) - S(x-b)][S(y+d - \nu\tau) - S(y-d - \nu\tau)]$, $S(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда, $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2$ – оператор Лапласа.

Застосовавши до рівняння (1) і умов (2) інтегральне перетворення Фур'є за змінними x, y і Лапласа за змінною τ , одержимо:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \gamma_s^2 \bar{\theta} = 0, \quad \left. \frac{d\bar{\theta}}{dz} \right|_{z=0} = -Q\bar{\varphi}, \quad \bar{\theta}|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (3)$$

де $\gamma_s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \frac{s}{a}}$; $\theta = T - T_0$ – надлишкова температура,

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \theta(x, y, \tau) \exp(i\xi x + i\eta y - s\tau) d\tau dy dx \quad (4)$$

зображення за Фур'є-Лапласом.

Розв'язок крайової задачі (3), що зникає на безмежності, має вигляд:

$$\bar{\theta} = A_s \exp(-\gamma_s z); \quad A_s = \frac{Q\bar{\varphi}}{\gamma_s}. \quad (5)$$

Перейшовши в (5) від трансформант Фур'є-Лапласа до оригіналів, використовуючи при цьому теореми про згортки і довідкові дані [4], одержимо

$$\theta = \frac{Q}{4\sqrt{a}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\bar{\varphi}(x_0, y_0, \tau_0)}{(\tau - \tau_0)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}{4a(\tau - \tau_0)}} d\tau_0 dy_0 dx_0. \quad (6)$$

У співвідношенні (6) перейдемо до рухомої системи координат $x_1 = x$; $y_1 = y - \nu\tau$; $z_1 = z$. Тоді, після обчислення відповідних інтегралів [2], знайдемо остаточний вигляд температури:

$$\theta(x, y, z, \tau) = \frac{Q}{4} \sqrt{\frac{a}{\pi_0}} \int_0^\tau \exp\left(-\frac{z_1^2}{4a\tau_*}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_1+b}{2\sqrt{a\tau_*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-b}{2\sqrt{a\tau_*}}\right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_1+d+\nu\tau_*}{2\sqrt{a\tau_*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y_1-d+\nu\tau_*}{2\sqrt{a\tau_*}}\right) \right] \frac{d\tau_*}{\sqrt{\tau_*}}, \quad (7)$$

де $\operatorname{erf}\zeta$ – інтеграл ймовірності, $\operatorname{erfc}\zeta = 1 - \operatorname{erf}\zeta$.

Відомо [7], що рівняння просторової квазістатичної задачі термопружності в напруженнях мають вигляд:

$$\Delta\sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \partial_{xx}^2 \sigma + \frac{E}{1-\nu} \alpha_T \Delta\theta + 2G\alpha_T \partial_{xx}^2 \theta = 0 \quad (xyz), \quad (8)$$

$$\Delta\sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \partial_{xy}^2 \sigma + 2G\alpha_T \partial_{xy}^2 \theta = 0 \quad (xyz), \quad (9)$$

де (xyz) – циклічна заміна, $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ – перший інваріант тензора напружень, що задовольняє рівнянню

$$\Delta\sigma = -2 \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \Delta\theta. \quad (10)$$

Поверхня півпростору вільна від зовнішнього навантаження, тобто

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (11)$$

На безмежності напруження та їхні похідні за координатами рівні нулю:

$$\sigma_{ij} \Big|_{|x|, |y|, |z| \rightarrow \infty} = 0 \quad (i, j = x, y, z), \quad \partial_x \sigma_{xx} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \partial_x \sigma_{xy} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad (12)$$

$$\partial_y \sigma_{yy} \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \quad \partial_y \sigma_{xy} \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0.$$

Застосувавши до рівнянь (8)–(10) і умов (11), (12) інтегральні перетворення Фур'є по x, y і Лапласа по τ , одержимо в просторі зображень систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$d_{zz}^2 \bar{\sigma}_{xx} - \gamma^2 \bar{\sigma}_{xx} - \frac{\xi^2}{1+\nu} \bar{\sigma} + \alpha_T \left(\frac{E}{1-\nu} \frac{s}{a} - 2G\xi^2 \right) \bar{\theta} = 0, \quad (xy, \xi\eta); \quad (13)$$

$$d_{zz}^2 \bar{\sigma}_{zz} - \gamma^2 \bar{\sigma}_{zz} + \frac{1}{1+\nu} d_{zz}^2 \bar{\theta} + \alpha_T \left(\frac{E}{1-\nu} \frac{s}{a} + 2G d_{zz}^2 \right) \bar{\theta} = 0, \quad (14)$$

$$d_{zz}^2 \bar{\sigma}_{xy} - \gamma^2 \bar{\sigma}_{xy} - \frac{\xi\eta}{1+\nu} \bar{\sigma} = 2\alpha_T G \xi\eta d_z \bar{\theta}, \quad (15)$$

$$d_{zz}^2 \bar{\sigma}_{xz} - \gamma^2 \bar{\sigma}_{xz} - \frac{i\xi}{1+\nu} d_z \bar{\sigma} = 2\alpha_T G i \xi d_z \bar{\theta}, \quad (xy, \xi\eta); \quad (16)$$

$$d_{zz}^2 \bar{\sigma} - \gamma^2 \bar{\sigma} - \frac{\xi\eta}{1+\nu} \bar{\sigma} = -2\alpha_T \frac{E}{1-\nu} \frac{s}{a} \bar{\theta}, \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = 0, \bar{\sigma}_{yz} = 0, \bar{\sigma}_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \bar{\sigma}_{ij} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (18)$$

Розв'язки диференціальних рівнянь (14), (17) з урахуванням рівностей (5) і умов (18) мають вигляд:

$$\bar{\sigma} = A \exp(-\gamma z) - 2\alpha_T \frac{E}{1-\nu} \bar{\theta}, \quad (19)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \left(A \gamma \frac{z}{2(1+\nu)} + A_3 \right) \exp(-\gamma z) + \frac{E \alpha_T}{s(1-\nu)} \gamma^2 A_s \exp(-\gamma_s z), \quad (20)$$

$$\text{де} \quad A_3 = -\frac{E \alpha_T \gamma^2}{s(1-\nu)} A_s, \quad \gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Застосувавши до рівнянь рівноваги

$$\partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy} + \partial_z \sigma_{xz} = 0 \quad (xyz) \quad (21)$$

інтегральне перетворення Фур'є-Лапласа, одержуємо

$$d_z \bar{\sigma}_{zz} = i(\xi \bar{\sigma}_{xz} + \eta \bar{\sigma}_{yz}), \quad d_z \bar{\sigma}_{xz} = i(\xi \bar{\sigma}_{xx} + \eta \bar{\sigma}_{xy}) \quad (\xi\eta, xy). \quad (22)$$

На поверхні півпростору $z=0$ з рівняння (22), з урахуванням крайових умов (18) знайдемо, що $d_z \bar{\sigma}_{zz} \Big|_{z=0} = 0$. Таким чином,

$$A = 2A_s(1+\nu) + \frac{2E\alpha_T(1+\nu)a}{(1-\nu)s} \gamma \gamma_s A_s, \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = N \left\{ \gamma^2 \exp(-\gamma_s z) + \gamma^2 [(\gamma_s - \gamma)z - 1] \exp(-\gamma z) \right\}, \quad (23)$$

$$\bar{\sigma} = 2N(1+\nu)\gamma(\gamma_s - \gamma) \exp(-\gamma z) - 2\frac{E\alpha_T \bar{\theta}}{1-\nu}, \quad (24)$$

$$\text{де} \quad N = \alpha_T E \frac{A_s a}{(1-\nu)s}.$$

Рівняння (16), з урахуванням співвідношень (5), (19), перепишемо у вигляді

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}_{xz}}{dz^2} - \gamma^2 \bar{\sigma}_{xz} = i \xi \left[\frac{\alpha_T E}{1-\nu} \gamma_s A_s \exp(-\gamma_s z) - \frac{\gamma}{1+\nu} A \exp(-\gamma z) \right] (xy, \xi\eta), \quad (25)$$

звідки одержимо його розв'язок

$$\bar{\sigma}_{xz} = A_1 \exp(-\gamma z) + i\xi \left[\frac{\alpha_T E \gamma_s a}{s(1-\nu)} A_s \exp(-\gamma_s z) + \frac{z}{2(1+\nu)} \exp(-\gamma z) \right] \quad (xy, \xi\eta, 12). \quad (26)$$

За допомогою перших двох крайових умов (18) знайдемо

$$A_1 = -i\xi N \gamma_s, \quad A_2 = -i\eta N \gamma_s. \quad (27)$$

Отже,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz} &= i\xi N \{ \gamma_s \exp(-\gamma_s z) + [z\gamma(\gamma_s - \gamma) - \gamma_s] \exp(-\gamma z) \}, \\ \bar{\sigma}_{yz} &= i\eta N \{ \gamma_s \exp(-\gamma_s z) + [z\gamma(\gamma_s - \gamma) - \gamma_s] \exp(-\gamma z) \}. \end{aligned} \quad (28)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (22₂), (22₃) відносно $\bar{\sigma}_{xy}$ і $\bar{\sigma}_{xx}$ та враховуючи вираз $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\sigma}_{zz}$, знайдемо:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{\gamma^2} \left[\xi\eta(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}) - i(\eta d_z \bar{\sigma}_{xz} + \xi d_z \bar{\sigma}_{yz}) \right], \\ \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{\gamma^2} \left[-\eta(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}) + i(\eta d_z \bar{\sigma}_{yz} - \xi d_z \bar{\sigma}_{xz}) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Врахувавши співвідношення (28), (23), (24), рівності (29) перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= N \left[-\left(\xi^2 \gamma_s^2 + \eta^2 \frac{s}{a} \right) \frac{\exp(-\gamma_s z)}{\gamma^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\xi^2 (\gamma_s - \gamma) z + \frac{2\gamma_s}{\gamma} (\xi^2 + \nu\eta^2) \right) \exp(-\gamma z) \right]; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = -\frac{\xi\eta N}{\gamma_s} \left[\exp(-\gamma_s z) + \left((\gamma_s - \gamma) z + 1 - 2\nu - \frac{2\gamma_s}{\gamma} (1-\nu) \right) \exp(-\gamma z) \right] \quad (31)$$

Якщо $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{zz}$, $\bar{\sigma}$ визначені, то

$$\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{zz}. \quad (32)$$

Перехід від трансформант Фур'є-Лапласа до оригіналів у співвідношеннях (23), (24), (28), (30)-(32) здійснювався з використанням теорем про згортки. Зокрема,

$$\sigma = 2 \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left[-\theta + \frac{Qa}{2\pi} (1+\nu) \int_0^{\tau} \int_{x-b}^{x+b} \int_{y-d+\nu\tau_*}^{y+d+\nu\tau_*} \Psi(x_*, y_*, z, \tau_*) dx_* dy_* d\tau_* \right], \quad (33)$$

$$\text{де } \Psi = (2z^2 - x_*^2 - y_*^2) r_*^{-5} S_+(\tau_*) - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \exp(-z\gamma) \operatorname{erf}(\gamma \sqrt{a\tau_*}) \times$$

$$\times \cos(\xi x_*) \cos(\eta y_*) d\xi d\eta, \quad r_* = \sqrt{x_*^2 + y_*^2 + z^2}. \quad (34)$$

Інші компоненти тензора напружень мають вирази аналогічні до (33), (34), однак, через обмеженість обсягу повідомлення тут не приводяться.

Більшість інтегралів у співвідношеннях (33), (34) – табличні [2]. Приведемо для обчислень значення напружень σ_{xx} і σ_{yy} на поверхні півпростору $z = 0$ при $x = 0$, $b = d$:

$$\sigma_x \equiv \frac{\sigma_{xx}|_{z=0, x=0, b=d}}{2\alpha_T EQb} = \frac{1}{\pi(1-\nu)} (M + \nu R - \mathcal{G}),$$

$$\sigma_y \equiv \frac{\sigma_{yy}|_{z=0, x=0, b=d}}{2\alpha_T EQb} = \frac{1}{\pi(1-\nu)} (R + \nu M - \mathcal{G}), \quad (35)$$

$$\text{де } \mathcal{G} = \frac{\theta|_{z=0, x=0, b=d}}{Qb} = \frac{\pi}{4} \int_0^{Fo} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\zeta}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_+}{2\sqrt{\zeta}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_-}{2\sqrt{\zeta}}\right) \right] \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}},$$

$$M = \frac{1}{V} \left(\sqrt{1+R_+^2} - \sqrt{1+Y_+^2} - \sqrt{1+R_-^2} + \sqrt{1+Y_-^2} \right) + \int_0^{Fo} [\psi_1(\tilde{R}_-, \zeta) - \psi_1(\tilde{R}_+, \zeta)] d\zeta,$$

$$R = \frac{1}{2V} \ln \frac{\left(\sqrt{1+R_+^2} - 1 \right) \left(\sqrt{1+Y_+^2} + 1 \right) \left(\sqrt{1+Y_-^2} - 1 \right) \left(\sqrt{1+R_-^2} + 1 \right)}{\left(\sqrt{1+R_+^2} + 1 \right) \left(\sqrt{1+Y_+^2} - 1 \right) \left(\sqrt{1+Y_-^2} + 1 \right) \left(\sqrt{1+R_-^2} - 1 \right)} + \int_0^{Fo} [\psi_2(\tilde{R}_-, \zeta) -$$

$$- \psi_2(\tilde{R}_+, \zeta)] d\zeta, \quad R_{\pm} = Y_{\pm} + VFo, \quad Y_{\pm} = \frac{y_1 \pm b}{b}, \quad \tilde{R}_{\pm} = Y_{\pm} + V\zeta, \quad V = \frac{\nu b}{a}, \quad Fo = \frac{a\tau}{b^2},$$

$$\psi_1(\tilde{R}_{\pm}, \zeta) = \exp\left(-\frac{1}{4\zeta}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_{\pm}}{2\sqrt{\zeta}}\right) + \frac{\tilde{R}_{\pm}^2}{\sqrt{1+\tilde{R}_{\pm}^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{1+\tilde{R}_{\pm}^2}}{2\sqrt{\zeta}}\right),$$

$$\psi_2(\tilde{R}_{\pm}, \zeta) = \frac{1}{\tilde{R}_{\pm}^2} \left[\exp\left(-\frac{\tilde{R}_{\pm}^2}{4\zeta}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{R}_{\pm}^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{1+\tilde{R}_{\pm}^2}}{2\sqrt{\zeta}}\right) \right].$$

3. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

За формулами (35) проведено розрахунок безрозмірних температури \mathcal{G} , напружень σ_x та σ_y при $\nu = 0.3$. На рисунках 2а, 2б подано розподіл вказаних напружень для різних значень безрозмірного

часу Fo (критерію Фур'є) при $V = 5$, а на рис. 3б при фіксованому часі $Fo = 1.0$ і різних значеннях безрозмірної швидкості V . Як видно з графіків з ростом Fo абсолютне значення напружень збільшується в основному в зоні дії джерела тепла $-1 \leq Y_1 \leq 1$ і досягає максимального значення в околі $Y_1 = -1$. Тут $Y_1 = y_1/b$.

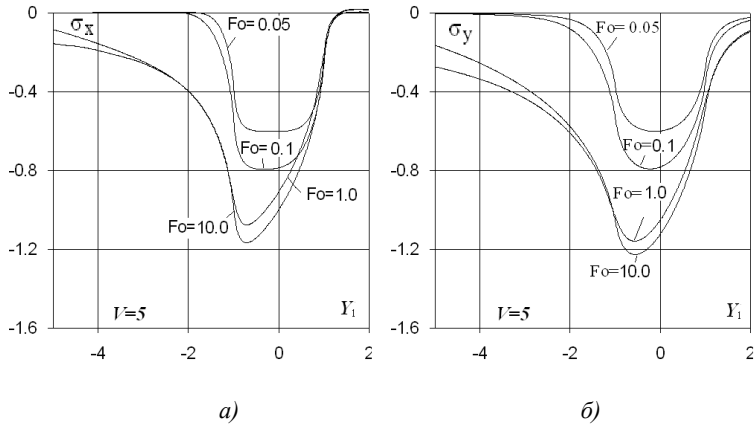


Рис. 2. Графіки розподілу залежно від координати Y_1 при $V=5$:
 а) напружень σ_x ; б) напружень σ_y

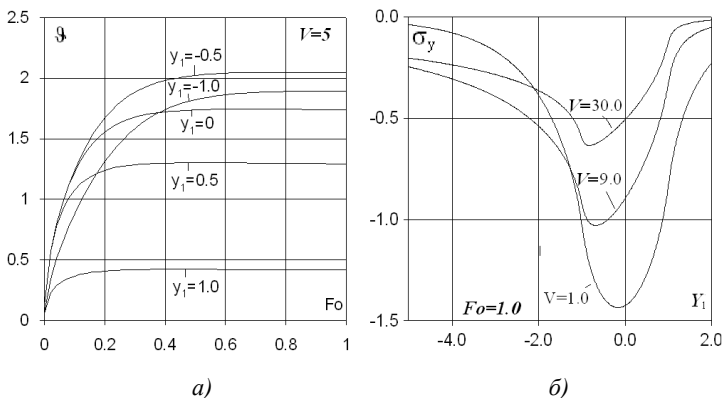


Рис. 3. Графіки розподілу: а) температури θ залежно від часу Fo при $V=5$;
 б) напружень σ_y залежно від координати Y_1 при різних значеннях V

Схожі ефекти спостерігаються і на рис. 3б, однак з ростом швидкості руху джерела абсолютне значення напружень зменшується. На рис. 3а показано розподіл безрозмірної температури θ залежно від

часу F_0 для різних значень координати Y_1 при $V = 5$. Як видно з графіків температура досягає максимального значення в околі $Y_1 = -0,5$.

4. ВИСНОВКИ

1. Побудовано аналітичний роз'язок просторової (трьохмірної) квазістатичної задачі термопружності для півпростору, поверхня якого нагрівається рухомим джерелом тепла у формі прямокутника. Побудова розв'язку здійснювалася на основі відомої математичної моделі з використанням рівнянь квазістатичної термопружності в напруженнях та інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа. Цей результат дозволяє візуалізувати на графіках відповідні розподіли температури і напружень, що виникають у півпросторі.

2. Результати цієї задачі можуть бути використані в певних поліграфічних процесах (див. вступ). Цей підхід може бути застосований для моделювання процесу лазерної теплової обробки матеріалів [6].

1. Бабей Ю.И. Физические основы импульсного упрочнения стали и чугуна. – К.: Наукова думка, 1988.–240 с. 2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с. 3. Гунько С.Н., Демков В.И. Словарь по полиграфии и полиграфической технологии. Понятия и определения.–Минск, 1995.–230 с. 4. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с. 5. Дьюли У. Лазерная технология и анализ материалов.–М.: Мир, 1986.–504 с. 6. Коляно Я.Ю., Іваник Є.Г. Нестационарна задача теплопроводности для плиты при локальной дйи теплового потока // Комп'ютерні технології друкарства: Зб. наук. праць – Львів:УАД, 2008.–№20.–С.222-231. 7. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. – М.:ОНТИ, 1937. – 109с. 8. Розум. О.Ф. Таблицы друкарства. – Київ:Техніка, 1980.–143 с. 9. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Зуев И.В., Кокора А.Н. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов.–М.:Машиностроение, 1985.–496 с. 10. Самарин Ю.Н. Доречатное оборудование:Конструкция и расчет. Учебник для вузов/Моск. Гос. Ун-т печати. – М.: МГУП, 2002. – 555 с. 11. Сипайлов В.А. Тепловые процессы при шлифовании и управление качеством поверхности.–М.:Машиностроение, 1978.–166 с. 12. Турчин О.Ю. Квазістатичний термопружний стан у півпросторі, зумовлений рухомим прямокутним джерелом тепла // Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат.–2002.–№60.–С.173-178. 13. Шахбазов Я.О. Керування робочою поверхнею шліфувальних кругів. – Львів: Фенікс, 1998. – 136 с. 14. Ярема С.М. Флексографія: Обладнання. Технологія: Навч. посібник–К.:Либідь, 1998.–312 с.