УДК 519.65
© П. Малачівський[6], 2011

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СУМОЮ ПОЛІНОМУ Й СТЕПЕНЕВОГО ВИРАЗУ З ВІДТВОРЕННЯМ ЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ В КРАЙНІХ ТОЧКАХ

Встановлено необхідні та достатні умови існування інтерполяції неперервно диференційовної функції сумою поліному й степеневого виразу з відтворенням значення похідної функції в крайніх точках. Вказано функції, що задовольняють цим умовам. Запропоновано й обґрунтовано схему обчислення значень параметрів такої інтерполяції.

The necessary and sufficient conditions of interpolation existence of conti-nuously differentiable function by the sum of polynomial and power expression with reproduction of value derivative in the end points are established. Functions, which satisfy these conditionsconditions, are indicated. There is proposed and grounded the calculation scheme for value of parameters such interpolations.

1. ВСТУП

Інтерполяція нелінійними виразами не завжди існує, а в разі існування – обчислення значень параметрів, що входять у вираз нелінійно, здебільшого досить трудомістке. Загальні умови існування інтерполяції функції сумою поліному й нелінійного виразу

$$V_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + A\varphi(p;x), \qquad A\neq 0, \qquad p_1<p<p_2 \qquad (1)$$

з відтворенням значення похідної функції в крайніх точках встановлено в праці [1]. У цій праці встановлено необхідні й достатні умови існування такої інтерполяції сумою поліному й степеневого виразу

$$C_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + Ax^p, \quad x\geq 0, \quad A\neq 0, \quad p\neq k \ \left(k=\overline{0,n}\right). \qquad (2)$$

[6] Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Українська академія друкаства

Такий вираз використовують для опису різних фізичних процесів [2, 3] і наближення деяких спеціальних функцій, зокрема, для наближення еліптичних інтегралів [4].

1. ІСНУВАННЯ ЕРМІТОВОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ СУМОЮ ПОЛІНОМУ Й НЕЛІНІЙНОГО ВИРАЗУ

Нехай у виразі вигляду (1) нелінійна функція $\varphi(p;x)$ з параметром p має такі властивості:

– u1) функція $\varphi(p;x)$ неперервна на відрізку $[\alpha,\beta]$ разом з $(n+1)$-ю похідною $\varphi(p;x)\in C^{(n+1)}[\alpha,\beta]$;

– u2) функція $\varphi(p;x)$ та її похідні $\varphi^{(i)}(p;x)$, $i=\overline{1,n}$ є строго монотонними функціями від x на відрізку $[\alpha,\beta]$ для будь-яких $p\in(p_1,\ p_2)$;

– u3) відношення $(n+1)$-их похідних $\varphi(p;x)$ по x $\varphi^{(n+1)}(p;\chi_2)/\varphi^{(n+1)}(p;\chi_1)$ є строго монотонною функцією від p для $p\in(p_1,p_2)$ та будь-яких різних $\chi_1,\ \chi_2\in[\alpha,\ \beta]$.

Розглянемо неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha,\beta]$ функції $f(x)$, що справджують нерівності

$$0<W_1^{(n)}<W^{(n)}<W_2^{(n)}, \tag{3}$$

де

$$W^{(n)}=D_{n+1}(f;\ z_2,\ z_3,\dots,\ z_{n+3})/D_{n+1}(f;\ z_1,\ z_2,\dots,\ z_{n+2}), \tag{4}$$

$$D_k(U;z_j,z_{j+1},\dots,z_{j+k})=\frac{D_{k-1}(U;\ z_{j+1},z_{j+2},\dots,z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1};z_{j+1},z_{j+2},\dots,z_{j+k})}-$$
$$-\frac{D_{k-1}(U;z_j,z_{j+1},\dots,z_{j+k-1})}{D_{k-1}(s_{k-1};z_j,z_{j+1},\dots,z_{j+k-1})},\ k=\overline{3,\ n+1},\ j=\overline{1,\ n-k+3}, \tag{5}$$

$$D_2(U;z_j,z_{j+1},z_{j+2})=\begin{cases}\dfrac{D_1(U;z_2,z_3)}{D_1(s_1;z_2,z_3)}-U'(z_1), & \text{ÿêùî}\quad j=1;\\ \dfrac{D_1(U;z_{j+1},z_{j+2})}{D_1(s_1;z_{j+1},z_{j+2})}-\dfrac{D_1(U;z_j,z_{j+1})}{D_1(s_1;z_j,z_{j+1})}, & \text{ÿêùî}\quad 1<j<n+1;\\ U'(z_{n+3})-\dfrac{D_1(U;z_{n+1},z_{n+2})}{D_1(s_1;z_{n+1},z_{n+2})}, & \text{ÿêùî}\quad j=n+1,\end{cases} \tag{6}$$

$$D_1\left(U; z_j, z_{j+1}\right) = \begin{cases} U'\left(z_1\right), & \text{ÿêùî} \quad j = 1; \\ U\left(z_{j+1}\right) - U\left(z_j\right), & \text{ÿêùî} \quad 1 < j \le n+1; \\ U'\left(z_{n+3}\right), & \text{ÿêùî} \quad j = n+2, \end{cases} \tag{7}$$

$s_k\left(x\right) = x^k$,

$$W_1^{(n)} = \min\left(r_1^{(n)}, r_2^{(n)}\right), \qquad W_2^{(n)} = \max\left(r_1^{(n)}, r_2^{(n)}\right), \tag{8}$$

$$r_i^{(n)} = \lim_{p \to p_i} D_{n+1}\left(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+3}\right) / D_{n+1}\left(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2}\right), \quad i = 1, 2 \ , \tag{9}$$

де $U'\left(x\right)$ – похідна функції $U\left(x\right)$, z_j $\left(j = \overline{2, n+2}\right)$ – будь-які, впорядковані за зростанням, числа з відрізка $\left[\alpha, \beta\right]$, $z_1 = z_2$, а $z_{n+3} = z_{n+2}$.

Умови існування ермітової інтерполяції функції $f\left(x\right)$ виразом (1) в праці [1] сформульовано у вигляді теореми 1.

***Теорема 1*.** Нехай функція $f\left(x\right)$ неперервно диференційовна на відрізку $\left[\alpha, \beta\right]$ $\left(f\left(x\right) \in C^1\left[\alpha, \beta\right]\right)$, а функція $\varphi\left(p; x\right)$ задовольняє вимогам u1, u2 і u3, тоді необхідною й достатньою умовою існування ермітової інтерполяції функції $f\left(x\right)$ сумою поліному степеня n $\left(n \ge 1\right)$ й нелінійного виразу (1) на множині різних впорядкованих за зростанням точок z_j $\left(j = \overline{2, n+2}\right)$ з відрізка $\left[\alpha, \beta\right]$, яка відтворює значення похідної функції в крайніх точках z_2 та z_{n+2} , є справдження нерівностей (3).

2. ЕРМІТОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СУМОЮ ПОЛІНОМУ Й СТЕПЕНЕВОГО ВИРАЗУ

Умови існування інтерполяції функції $f\left(x\right)$ сумою поліному й степеневого виразу (2) встановлює теорема 2.

Теорема 2. Нехай функція $f\left(x\right)$ неперервно диференційовна на відрізку $\left[\alpha, \beta\right]$, тоді необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f\left(x\right)$ сумою поліному степеня n $\left(n \ge 1\right)$ й степеневого виразу (2) на множині різних впорядкованих за зростанням точок z_j $\left(j = \overline{2, n+2}\right)$ з відрізка $\left[\alpha, \beta\right]$, яка відтворює значення похідної функції в крайніх точках z_2 та z_{n+2} , є справдження нерівностей.

$$W^{(n)} > 0 \ , \qquad W^{(n)} \ne \widetilde{W}_r^{(n)} \ , \qquad r = \overline{0, n} \ , \tag{10}$$

де

$$\widetilde{W}_r^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{ÿêùî} \quad z_1 = 0; \\ \dfrac{D_{n+1}\left(l_{n+1};\ z_2,\ z_3,\ldots,\ z_{n+3}\right)}{D_{n+1}\left(l_{n+1};\ z_1,\ z_2,\ldots,\ z_{n+2}\right)}, & \text{ÿêùî} \quad z_1 > 0\ , \end{cases} \tag{11}$$

$l_k(x) = x^k \ln(x)$,

$W^{(n)}$ визначаємо за формулою (4), а $D_k\left(U; z_j, z_{j+1},\ldots,z_{j+k}\right)$ – за форму-лами (5) – (7).

Доведення. Покажемо, що сума поліному й степеневого виразу (2) для значень параметра p відмінних від 0, 1, ..., n задовольняє умовам теореми 1.

Розглянемо спочатку випадок від'ємних значень параметра p $(p<0)$. Для функції $\varphi(p;x) = x^p$ величини $W_1^{(n)}$ і $W_2^{(n)}$ відповідно до (9), набувають таких значень

$$W_1^{(n)} = \lim_{p\to-\infty} \omega_n(p) = 0\,, \qquad W_2^{(n)} = \lim_{p\to-0} \omega_n(p) = \widetilde{W}_0^{(n)},$$

де

$$\omega_n(p) = \frac{D_{n+1}\left(\varphi;\ z_2,\ z_3,\ldots,\ z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi;\ z_1,\ z_2,\ldots,\ z_{n+3}\right)},$$

$\widetilde{W}_0^{(n)}$ визначаємо за формулою (4), значення виразів $D_k\left(U; z_i, z_{i+1},\ldots,z_{i+k+1}\right)$ для $k = \overline{3,\ n+1}$, $j = \overline{1,\ n-k+3}$ – за формулою (5), а $D_2\left(U; z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}\right)$ і $D_1\left(U; z_i, z_{i+2}\right)$ – за формулами (6) і (7).

Отже, на підставі теореми 1 необхідною та достатньою умовою іс-нування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (2) з від'ємним значенням параметра p на множині точок z_j $\left(j = \overline{1,\ n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ з від-творенням значень похідної функції в крайніх точках є справдження нерівностей

$$0 < W^{(n)} < \widetilde{W}_0^{(n)}\,. \tag{12}$$

Аналогічно, у випадку, коли значення параметра p належить од-ному з інтервалів $(j-1,\ j)$, $j = \overline{1, n}$

$$W_1^{(n)} = \lim_{p\to j-1+0} \omega_n(p) = \widetilde{W}_{j-1}^{(n)} \qquad \text{і} \qquad W_2^{(n)} = \lim_{p\to j-0} \omega_n(p) = \widetilde{W}_j^{(n)}.$$

Відповідно до теореми 1 це означає, що необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ на множині точок z_j $\left(j = \overline{1,\ n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ з відтворенням значень похідної функції в крайніх точках сумою поліному й степеневого виразу (2) зі значенням параметра p, що належать одному з інтервалів $(j-1, j)$, $j=\overline{1, n}$, є справдження нерівностей

$$\widetilde{W}_{j-1}^{(n)} < W^{(n)} < \widetilde{W}_{j}^{(n)}. \qquad (13)$$

У випадку, коли значення параметра p більше від n $(p \in (n, \infty))$, то

$$W_1^{(n)} = \lim_{p \to n+0} \omega_n(p) = \widetilde{W}_n^{(n)} \qquad \text{і} \qquad W_2^{(n)} = \lim_{p \to \infty} \omega_n(p) = \infty .$$

На підставі теореми 1 це означає, що необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ на множині точок z_j $(j=\overline{1, n+3})$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ з відтворенням значень похідної функції в крайніх точках сумою поліному та степеневого виразу (2) зі значенням параметра p більшим від n є справдження нерівності

$$W^{(n)} > \widetilde{W}_n^{(n)}. \qquad (14)$$

Отже, сума поліному та степеневого виразу (2) задовольняє умови теореми 1 при будь-яких значеннях p, відмінних від 0, 1, ..., *n*. Таким чином, необхідною й достатньою умовою існування ермітової інтерполяції функції $f(x)$ на множині точок z_j $(j=\overline{1, n+3})$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ із відтворенням похідної функції у крайніх точках відрізка зі значенням параметра p відмінним від 0, 1, ..., *n* є виконання однієї з нерівностей (12), (13) або (14), що еквівалентно умові (10). ***Теорему доведено.***

Проаналізуємо умову (10). Розглянемо величини $W_r^{(n)}$ (6.4.3) для *r* = 0, 1, ..., n. Значення виразу $W^{(n)}$ співпадає з $\widetilde{W}_r^{(n)}$ для функцій $f(x)$, що мають вигляд

$$b_0 + Bx^r \ln(x), \qquad x > 0, \qquad (15)$$

де b_0 і B – будь-які дійсні числа.

Виконання першої нерівності $W^{(n)} > 0$ умови (10) вимагає співпадання знаків величин $D_{n+1}(f; z_i, z_{i+1}, ..., z_{i+n+1})$, $i=\overline{1, 2}$. В [1] становлено, що вони дорівнюють приросту n-ої похідної функції $f(x)$. Отже, нерівність $W^{(n)} > 0$ виконується, зокрема, для функцій $f(x)$ неперервно диференційовних до n-го порядку, *n*-на похідна яких строго монотонна на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Таким чином, умові існування ермітової інтерполяції виразом (2) на відрізку $[\alpha, \beta]$ задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ неперервно диференційовні до n -го порядку $\left(f(x)\in C^n[\alpha,\beta]\right)$, n-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha,\ \beta]$, за винятком функції, що співпадають з (15) для $r=\overline{0,\ n}$.

3. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЕРМІТОВОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ СУМОЮ ПОЛІНОМУ ТА СТЕПЕНЕВОГО ВИРАЗУ

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову теореми 2, то параметри a_i $\left(i=\overline{0,\ n}\right)$ і A інтерполяції $f(x)$ виразом (2) на множині впорядко-ваних за зростанням точок z_j $\left(j=\overline{2,\ n+2}\right)$ з відрізка $[\alpha,\beta]$ визнача-ються за формулами

$$A=D_{n+1}(f;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+2})/D_{n+1}(\varphi;z_1,\ z_2,...,\ z_{n+2});\tag{16}$$

$$a_k=\frac{D_k(f;z_1,z_2,...,\ z_{k+1})-\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_iD_k(s_i;z_1,z_2,...,z_{k+1})-AD_k(\varphi;z_1,z_2,...,z_{k+1})}{D_k(s_k;z_1,z_2,...,\ z_{k+1})},$$

$$k=\overline{1,\ n}\ ;\tag{17}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(f(z_1)+f(z_2)-\sum_{i=1}^{n}a_i\left(z_1^i+z_2^i\right)-A\left(z_1^p+z_2^p\right)\right),\tag{18}$$

де вирази $D_k(U;z_i,z_{i+1},...,z_{i+k})$ визначають за формулами (5)-(7), $\varphi(p;\ x)=\tilde{o}^p$ $z_1=z_2$, а $z_{n+3}=z_{n+2}$.

Значення параметра p визначається як розв'язок рівняння

$$\omega_n(p)=W^{(n)},\tag{19}$$

де

$$\omega_n(p)=D_{n+1}(\varphi;z_{2,},\ z_3,...,\ z_{n+3})/D_{n+1}(\varphi;z_1,\ z_2,...,\ z_{n+2}),\tag{20}$$

$\varphi(p;\ x)=x^p$, а вирази $W^{(n)}$ і $D_k(U;z_i,z_{i+1},...,z_{i+k})$ – визначаємо за формулами (4)-(7).

Розв'язування рівняння (19) проводимо з врахуванням того, що у випадку коли значення величини $W^{(n)}$ задовольняє нерівностям

$$\widetilde{W}_0^{(n)}<W^{(n)}<\widetilde{W}_n^{(n)},\tag{21}$$

його розв'язок належить одному з інтервалів $(k,\ k+1)$, де $k=0,1,...,n-1$. Тому спочатку необхідно перевірити чи належить ко-рінь рівняння одному із цих інтервалів. Якщо значення параметра p належить одному з цих інтервалів, то його можна уточнити за методом хорд або ділення навпіл. У протилежному випадку значення параметра p належить одному з інтервалів $(-\infty, 0)$ або (n, ∞).

Уточнення кореня рівняння (19) в інтервалах $(-\infty, 0)$ і (n, ∞) ґрунтується на врахуванні того, що відповідно до [1] його ліва частина є степеневою функцією і її можна подати у вигляді

$$\omega_n(p) = K(\zeta_2/\zeta_1)^{p-n-1}, \tag{22}$$

де $$K = \frac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \qquad \zeta_1 \in (z_1, z_{n+2}), \qquad \zeta_2 \in (z_2, z_{n+3}).$$

Враховуючи степеневий характер залежності (22) лівої частини рівняння (19) від p, його розв’язок доцільно шукати як корінь рівняння

$$g_n(p) = V^{(n)}, \tag{23}$$

де $g_n(p) = \ln(\omega_n(p))$, $V^{(n)} = \ln\left(W^{(n)}\right)$. Розв’язок цього рівняння можна обчислити за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n(p_i) - V^{(n)}}{g_n'(p_i)}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

де

$$g_n'(p) = \frac{D_{n+1}(\bar{\varphi}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+3})} - \frac{D_{n+1}(\bar{\varphi}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})}; \tag{25}$$

$$\bar{\varphi}(p; x) = x^p \ln(x), \qquad \varphi(p; z) = z^p,$$

$$p_0 = \begin{cases} -p^*, & \text{ÿêùî} \quad W^{(n)} < W_0^{(n)}, \\ n + 1 + p^*, & \text{ÿêùî} \quad W^{(n)} > \widetilde{W}_n^{(n)}, \end{cases} \tag{26}$$

$$p^* = \frac{\left|\ln W^{(n)}\right|}{\ln(z_{n+3} + z_2) - \ln(z_{n+2} + z_1)},$$

вирази $W^{(n)}$ і $D_{n+1}(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+n+1})$ визначаємо за формулами (4) – (7), а $\widetilde{W}_0^{(n)}$ і $\widetilde{W}_n^{(n)}$ – за формулою (11).

Вибір початкового значення p_0 (26) є достатньо близьким до розв’язку рівняння й забезпечує співпадання їхніх знаків, що необхідно для дотримання стійкості ітераційного методу (24). Функція $g_n(p)$ при $\varphi(p; x) = x^p$ має розриви в точках $p = 0, 1, \ldots, n$ і перехід проміжних значень p_i через одну з цих точок може порушити збіжність методу (24). Попередня перевірка умови (21) і вибір початкового значення p_0 за формулою (26) забезпечують обминання згаданих точок розриву лівої частини рівняння (19) під час знаходження його розв’язку за ітераційною схемою (24). Запропонована комбінація застосування ітераційних методів для розв’язування рівняння (19) забезпечує достатньо швидку їхню збіжність.

4. ВИСНОВОК

Необхідною та достатньою умовою існування ермітової інтерполяції сумою поліному й степеневого виразу (2) є справдження нерівностей (10). У разі виконання цих умов параметри такої інтерполяції визначаються за формулами (16) – (18). Значення показника степеня знаходиться як розв’язок трансцендентного рівняння (19). Для визначення значення кореня цього рівняння можна застосувати комбінацію ітераційних методів з використанням методу Ньютона (24).

1. Скопецький В. В., Малачівський П. С. Ермітова інтерполяція сумою полінома й нелінійного виразу // Доповіді НАН України. – 2010. – № 9. – С. 34-39. 2. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук.думка, 1989. – 272 с. 3. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 352 с. 4. Kobayashi Y., Ohkita M., Inoue M. Fractional power approximations of elliptic integrals and Bessel functions // Math. Comput. Simulation, – 1978. – V. 20. – № 4. – P. 285 – 290.