УДК 519.65

© Я. Пізюр[7], В. Андруник[1], Р. Малачівський[1], 2011

НЕПЕРЕРВНЕ МІНІМАКСНЕ СПЛАЙН-НАБЛИЖЕННЯ СУМОЮ МНОГОЧЛЕНА Й СТЕПЕНЕВОГО ВИРАЗУ

Розглянуто задачу побудови неперервного мінімаксного сплайн-наближення функцій сумою многочлена й степеневого виразу. Запропоновано алгоритм побудови такого сплайн-наближення із заздалегідь заданою похибкою. Подано апроксимацію низькотемпературної характеристики діодного сенсора, проведено аналіз похибки цієї апроксимації, а також точності відтворення чутливості сенсора.

The problem of constructing a continuos minimax spline approximation of functios by sum of a polynomial and power expression are considered. An algorithm for constructing such spline approximation with previously given error are proposed. Approximation low-temperature characteristics of the diode sensor are given, the error of this approximation and exactness regeneration sensor sensitivity are analyzed.

Сплайн-наближення функцій сумою многочлена й степеневого виразу

$$C_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + Ax^p\,, \quad x\geq 0\,,\ A\neq 0\,,\ p\neq k\ \left(k=\overline{0,n}\right) \qquad (1)$$

з невідомим параметром p застосовується для апроксимації залежностей деяких фізичних величин [1] і спеціальних функцій [2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай неперервна функція $f(x)$ $\left(f(x)\in C[\alpha,\beta]\right)$ задана на множині точок

$$X=\left\{x\in X:\alpha\leq x_1<x_2<\ldots<x_n\leq\beta\right\} \qquad (2)$$

відрізка $[\alpha,\beta]$ і має обмежену похідну на (α,β). Під неперервним мінімаксним сплайн-наближенням функції $f(x)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$ сумою многочлена й степеневого виразу (1) розумітимемо сплайн

$$S(x)=C_n\left(a^{(j)};x\right),\qquad t_j\leq x\leq t_{j+1}\,,\ \ j=\overline{1,q}\,, \qquad (3)$$

в якому q – кількість ланок сплайн-наближення, точки t_j $\left(j=\overline{1,q+1}\right)$ – межі ланок, $t_1=\alpha$, а $t_{q+1}=\beta$.

---

[7] Національний університет «Львівська політехніка»

У цьому сплайні кожний із виразів $C_n\left(a^{(j)};\, x\right)$, $j=\overline{1,\, q}$ є чебишовським наближенням функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відповідному відрізку $\left[t_{\mathrm{j}},\, t_{\mathrm{j+1}}\right]$, яке в точках дотику ланок t_j $\left(j=\overline{2,\, q}\right)$ відтворює значення функції $f(x)$

$$C_n\left(a^{(j-1)};\, t_j\right)=C_n\left(a^{(j)};\, t_j\right)=f\left(t_j\right),\; j=\overline{2,\, q}\,. \qquad (4)$$

Так визначені ланки сплайна забезпечують його неперервність, оскільки значення виразів $C_n\left(a^{(j)};\, x\right)$, $j=\overline{1,\, q}$ у точках дотику суміжних ланок t_j $\left(j=\overline{2,\, q}\right)$ співпадають.

Похибкою наближення функції $f(x)$ сплайном (3) буде

$$G=\max_{1\le j\le q} G_j\,, \qquad (5)$$

де G_j – значення абсолютної похибки наближення функції $f(x)$ виразом $C_n\left(a^{(j)};\, x\right)$ на *j*-й ланці сплайна

$$G_j=\max_{t_j\le x\le t_{j+1}}\left|\, f(x)-C_n\left(a^{(j)};x\right)\right|.$$

Сплайн-наближення (3) називатимемо сплайн-наближенням із заданою похибкою G_0, якщо $G\le G_0$, а кількість його ланок є найменшою з можливих.

2. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ НЕПЕРЕРВНОГО МІНІМАКСНОГО СПЛАЙН-НАБЛИЖЕННЯ СУМОЮ МНОГОЧЛЕНА Й СТЕПЕНЕВОГО ВИРАЗУ

Для побудови неперервного мінімаксного сплайн-наближення (3) із заздалегідь заданою похибкою можна використати алгоритми побудови мінімаксних сплайн-наближень, що описано в працях [1-4], з передбаченням дотримання умови (4), щодо неперервності сплайна.

Параметри виразів $C_n\left(a^{(j)};\, x\right)$, $j=\overline{1,\, q}$ сплайн-наближення (3) на кожній із ланок визначаються відповідно до критерію чебишовського наближення з відтворенням значення функції в крайніх точках відрізка [4]. Відповідно до характеристичної теореми [4] достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й степеневого виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\, \beta]$ і відтворенням її значення у крайніх точках відрізка α і β (або тільки в одній із них) є справдження нерівностей

$$W^{(n)} > 0 \ , \qquad W^{(n)} \neq \widetilde{W}_r^{(n)} \ , \qquad\qquad r = \overline{0,\, n} \ , \tag{6}$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}\left(f;\ z_2,\ z_3,\ldots,\ z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(f;\ z_1,\ z_2,\ldots,\ z_{n+3}\right)}\,, \tag{7}$$

$$\widetilde{W}_r^{(n)} = \begin{cases} 0, \quad ÿêùî \quad z_1 = 0 \\ \dfrac{D_{n+1}\left(l_{n+1};\ z_2,\ z_3,\ldots,\ z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(l_{n+1};\ z_1,\ z_2,\ldots,\ z_{n+3}\right)}, \quad ÿêùî \quad z_1 > 0\,, \end{cases} \tag{8}$$

$$D_k\left(U; z_r, z_{r+1},\ldots,z_{r+k+1}\right) =$$
$$= \frac{D_{k-1}\left(U;\ z_{r+1}, z_{r+2},\ldots,z_{r+k+1}\right)}{D_{k-1}\left(s_{k-1}; z_{r+1}, z_{r+2},\ldots,z_{r+k+1}\right)} - \frac{D_{k-1}\left(U; z_r, z_{r+1},\ldots,z_{r+k}\right)}{D_{k-1}\left(s_{k-1}; z_r, z_{r+1},\ldots,z_{r+k}\right)}, \tag{9}$$
$$k = \overline{2,\ n+1}, \qquad r = \overline{1,\, n-k+3},$$

$$D_1\left(U; z_r, z_{r+2}\right) = U\left(z_{r+2}\right) - U\left(z_r\right), \quad r = \overline{1,\, n+2}\,, \tag{10}$$
$$s_k(x) = x^k\ , \qquad l_k(x) = x^k \ln(x)\,,$$

а z_r $\left(r = \overline{1,\, n+4}\right)$ – будь-які, впорядковані за зростанням $z_r < z_{r+1}$ $\left(r = \overline{1,\ n+3}\right)$ числа з відрізка $[\alpha, \beta]$. У випадку наближення з інтерполюванням у точці α значення виразу $D_1\left(s_1;\ z_j,\ z_{j+2}\right)$ обчислюється за формулою

$$D_1\left(U; z_1, z_3\right) = U\left(z_3\right) + U\left(z_2\right) - 2U\left(z_1\right), \qquad \text{де} \quad z_1 = \alpha\ , \tag{11}$$

а в разі інтерполювання в точці β —

$$D_1\left(U; z_{n+2}, z_{n+4}\right) = 2U\left(z_{n+4}\right) - U\left(z_{n+3}\right) - U\left(z_{n+2}\right), \ \text{де} \quad z_{n+4} = \beta\,. \tag{12}$$

Умові (6) задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ неперервно диференційовані на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ до n-го порядку, n-а похідна яких строго монотонна, за винятком функцій, що мають вигляд

$$\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + Bx^r \ln(x), \quad x > 0\,, \tag{13}$$

де $b_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ і B – будь-які дійсні числа [4].

Якщо умова (6) на відповідних відрізках $\left[t_j,\ t_{j+1}\right]$, $j = \overline{1,\ q}$ виконується, то параметри чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й степеневого виразу (1) можна обчислити за схемою

Ремеза. При цьому параметри $a_i^{(j)}\ \left(i=\overline{0,\ n}\right)$ і $A^{(j)}$ виразів $C_n\left(a^{(j)};\ x\right)$ на окремих $j=\overline{1,\ q}$ ланках сплайна визначаються за формулами [4]

$$A^{(j)}=D_{n+1}\left(f;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3}\right)/D_{n+1}\left(\varphi;z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3}\right); \qquad (14)$$

$$a_k^{(j)}=\frac{D_k\left(f;z_1,\ ...,\ z_{k+2}\right)-\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_iD_k\left(s_i;z_1,...,z_{k+2}\right)-AD_k\left(\varphi;z_1,...,z_{k+2}\right)}{D_k\left(s_k;z_1,\ ...,\ z_{k+2}\right)};$$

$$k=\overline{1,\ n} \qquad (15)$$

$$a_0^{(j)}=\frac{1}{2}\left(f\left(z_2\right)+f\left(z_3\right)-\sum_{i=1}^{n}a_i\left(z_2^i+z_3^i\right)-A\left(z_2^p+z_3^p\right)\right), \qquad (16)$$

де значення виразів $D_k\left(U;z_i,z_{i+1},...,z_{i+k+1}\right)$ залежно від точок інтерполювання визначаються за відповідними формулами (9), (10), (11) і (або) (12), а $\varphi\left(p;x\right)=x^p$. Тут і далі через z_r $\left(r=\overline{1,\ n+4}\right)$ позначаються точки альтернансу й точки інтерполювання на відповідних відрізках $\left[t_j,\ t_{j+1}\right]$, $j=\overline{1,\ q}$.

Значення параметра $p^{(j)}$ є розв'язком рівняння

$$\omega_n\left(p\right)=W^{(n)}, \qquad (17)$$

де

$$\omega_n\left(p\right)=\frac{D_{n+1}\left(\varphi;\ z_2,\ z_3,...,\ z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi;\ z_1,\ z_2,...,\ z_{n+3}\right)},$$

а вираз $W^{(n)}$ визначається за формулою (7), $\varphi\left(p;\ x\right)=x^p$. Розв'язування рівняння (17) проводиться з врахуванням того, що у випадку коли значення величини $W^{(n)}$ задовольняє нерівностям

$$\widetilde{W}_0^{(n)}<W^{(n)}<\widetilde{W}_n^{(n)}, \qquad (18)$$

його розв'язок знаходиться в одному з інтервалів $\left(k,\ k+1\right)$, де $k=0,1,...,\ n-1$. Тому спочатку необхідно перевірити чи не попадає корінь рівняння в один із цих інтервалів. Якщо значення параметра p знаходиться в одному з цих інтервалів, то його можна визначити за методом хорд чи ділення навпіл. У протилежному випадку значення параметра p знаходиться в одному з інтервалів $\left(-\infty,0\right)$ або $\left(n,\ \infty\right)$. Значення параметра $p^{(j)}$ в цьому разі обчислюється за ітераційним методом Ньютона [4]

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n(p_i) - V^{(n)}}{g_n'(p_i)}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

де

$$g_n'(p) = \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})} - \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})};$$

$$g_n(p) = \ln\left(\frac{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}\right); \quad V^{(n)} = \ln\left(W^{(n)}\right);$$

$$\overline{\varphi}(p, x) = x^p \ln(x); \quad \varphi(p; z) = z^p;$$

$$p_0 = \begin{cases} p^*, & \textit{якщо} \quad W^{(n)} < \widetilde{W}_0^{(n)}; \\ n + 1 + p^*, & \textit{якщо} \quad W^{(n)} > \widetilde{W}_n^{(n)} \end{cases}; \tag{20}$$

$$p^* = \frac{\left|\ln W^{(n)}\right|}{\ln(z_{n+4} + z_2) - \ln(z_{n+3} + z_1)};$$

значення виразів $W^{(n)}$, $\widetilde{W}_0^{(n)}$, $\widetilde{W}_n^{(n)}$ і $D_{n+1}(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+n+2})$, $i = \overline{1,2}$ залежно від точок інтерполювання визначаємо відповідно за формулами (7) – (12).

Для забезпечення неперервності сплайна відповідно до умови (3) значення виразів $D_1(U; z_1, z_3)$ і $D_1(U; z_{n+2}, z_{n+4})$, а також початкове наближення до точок альтернансу визначаються залежно від порядкового номера ланки. Перша ланка сплайну $C_n\left(a^{(1)}; x\right)$ визначаються як чебишовське наближення функції $f(x)$ із найменшою абсолютною похибкою на $[t_1, t_2]$ з інтерполюванням у точці t_2, тому

$$D_1(U; z_1, z_3) = U(z_3) - U(z_1),$$

$$D_1(U; z_{n+2}, z_{n+4}) = 2U(z_{n+4}) - U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}),$$

де $z_{n+4} = t_2$. Початкове наближення до точок чебишовського альтернансу z_i $\left(i = \overline{1, n+3}\right)$ вибирається з $[t_1, t_2)$. Похибку апроксимації на першій ланці можна визначити за формулою

$$G_1 = \left| f(z_2) - \sum_{i=0}^{n} a_i^{(1)} z_2^i - A^{(1)} z_2^{p^{(1)}} \right|. \tag{21}$$

Параметри виразів $C_n\left(a^{(j)};\ x\right)$, $j=\overline{2,\ q-1}$ сплайн-наближення (3) функції $f(x)$ на внутрішніх ланках, починаючи з другої до передостанньої, визначаються за критерієм чебишовського наближення з умовою відтворення значення функції в обох крайніх точках кожної з цих ланок, тобто в крайніх точках відрізків $\left[t_j,\ t_{j+1}\right]$, $j=\overline{2,\ q-1}$. Для обчислення параметрів сплайна на цих ланках приймається, що

$$D_1(U;z_1,z_3)=U(z_3)+U(z_2)-2U(z_1),$$

$$D_1(U;z_{n+2},z_{n+4})=2U(z_{n+4})-U(z_{n+3})-U(z_{n+2}),$$

де $z_1=t_j$, а $z_{n+4}=t_{j+1}$. Початкове наближення до точок чебишовського альтернансу z_i $\left(i=\overline{2,\ n+3}\right)$ вибирається з інтервалу $\left(t_j,\ t_{j+1}\right)$. Похибку апроксимації на цих ланках можна визначити подібно до обчислення похибки апроксимації на першій ланці за формулою (21).

Для забезпечення неперервності сплайна наближення виразом $C_n\left(a^{(q)};\ x\right)$ на останній ланці визначається як чебишовське наближення з точним відтворенням значення функції в крайній лівій точці ланки – t_q. Під час обчислення параметрів сплайна на цій ланці приймається, що

$$D_1(U;z_1,z_3)=U(z_3)+U(z_2)-2U(z_1),$$

$$D_1(U;z_{n+2},z_{n+4})=U(z_{n+4})-U(z_{n+2}),$$

де $z_1=t_q$. Початкове наближення до точок чебишовського альтернансу z_i $\left(i=\overline{2,\ n+4}\right)$ вибирається з $\left(t_q,\ t_{q+1}\right]$. Похибку апроксимації на цій ланці також можна визначити подібно до обчислення похибки апроксимації на першій ланці за формулою (21).

Задача побудови неперервного мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена й експоненти (1) із заданою похибкою в разі наближення таблично заданих функцій не завжди має розв’язок. Вона не має розв’язку, якщо на одному з підінтервалів мінімально допустимої довжини ланки (n+4 – точки) отримується похибка G, більша від заздалегідь заданої G_0 $(G>G_0)$. Якщо під час побудови неперервного мінімаксного сплайн-наближення із заданою похибкою отримувалась похибка більша від заздалегідь заданої, то залежно від конкретної задачі на підінтервалах, на яких чебишовське наближення з необхідною похибкою не вдалося знайти, можна застосувати інтерполяцію цим же самим виразом або многочленом.

3. НЕПЕРЕРВНА АПРОКСИМАЦІЯ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОДІОДНОГО СЕНСОРА

Апроксимація неперервним мінімаксним сплайном (3) для $n = 2$ температурної характеристики термодіодного сенсора типу DT-471 [6] у діапазоні від 1.4 К до 475 К з абсолютною похибкою 0.2 мілівольта складається з семи ланок. Результати цього сплайн-наближення подано в таблиці 1.

Таблиця 1

Результати апроксимації температурної характеристики сплайном (3)

№ ланки	Межі ланки [K]	Значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, A і p виразу (1) для $n = 2$	Похибка апроксимації	
			характеристики [mB]	чутливості mB/K
1	1.4; 7	1.7035286; 0.0135757248; 0.024980825; -0.038914988; 1.877003499	0.196	1.49
2	7; 17	1.910667978; -0.07385772; 0.00281429; $-1.33901056 \cdot 10^{-5}$; 3.394914	0.199	0.86
3	17; 23	1.76791578; -0.042361317; 0.0007739287; $-9.6383622 \cdot 10^{-13}$; 7.851851	0.0398	1.25
4	23; 28	-3.71017245; 0.27984563; $-4.2781312 \cdot 10^{-3}$; 56300.3935; -3.605810686	0.137	3.8
5	28; 130	1.1523128; $-1.50726778 \cdot 10^{-3}$; $-2.59988206 \cdot 10^{-6}$; 376578913550; -9.652370015	0.185	0.23
6	130; 440	1.2129562; $-2.20521 \cdot 10^{-3}$; $-3.49771842 \cdot 10^{-7}$; -3416.91413; -2.665131981	0.15	$2.6 \cdot 10^{-2}$
7	440; 475	0.98339857; $-1.0962525 \cdot 10^{-3}$; $-1.6963107 \cdot 10^{-6}$; $2.766008 \cdot 10^{-61}$; 21.88758987	$1.04 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$

З поданих у цій таблиці даних слідує, що побудований неперервний мінімаксний сплайн відтворює температурну характеристику сенсора з абсолютною похибкою 0.19 мілівольт, а його чутливість із похибкою 3.8 мілівольт на Кельвін. Для порівняння зазначимо, що неперервне сплайн-наближення з поліноміальними ланками четвертого степеня з тією самою абсолютною похибкою також складається із семи ланок і забезпечує відтворення чутливості сенсора з похибкою 3.9 мілівольт на Кельвін.

4. ВИСНОВОК

Алгоритм побудови неперервного мінімаксного сплайн-наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й степеневого виразу ґрунтується на характеристичній властивості чебишовського наближення функції цим виразом із найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Значення показника степеня визначається за ітераційною схемою (19). Достатній умові існування чебишовського наближення сумою многочлена й степеневого виразу задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ неперервно диференційовані на відрізку $[\alpha, \beta]$ до n-го порядку, n-а похідна яких строго монотонна, за винятком функцій вигляду (13). Апроксимація температурної характеристики сенсора неперервним мінімаксним сплайном сумою полінома й степеневого виразу з похибкою 0.2 mВ забезпечує відтворення його чутливості з похибкою 3.8 mВ/K.

1. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наукова думка. 1980. – 352 с. 2. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наукова думка, 1989. – 272 с. 3. Kobayashi Y., Ohkita M., Inoue M. Fractional power approximations of elliptic integrals and Bessel functions // Math. Comput. Simulation, – 1978, V. 20, № 4. – P. 285 – 290. 4. Скопецкий В. В., Малачивский П. С. Чебышевское приближение функций суммой многочлена и выражения с нелинейным параметром и интерполированем в крайних точках отрезка // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – Т. 45. – № 1. – С. 64-76. 5. Малачівський П., Андруник В. Рівномірне сплайн-наближення // Комп'ютерні технології друкарства, № 7. – Львів: Українська академія друкарства, 2002. – С. 107-115. 6. www.lakeshore.com/*.../Curve 10/*