УДК 539.377

© Я. Пушак[31], 2011

ВПЛИВ ЗОВНІШНЬОЇ ТЕМПЕРАТУРИ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ДВОСТУПЕНЕВОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ

Наведено результати впливу температури зовнішнього середовища на виникнення зусиль в тонкій двоступеневій пластинці.

The results of the environment influence on the strength appearance in a thin two-stepped board.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ.

Якість поліграфічної продукції залежить від багатьох факторів. Одним із них є температурний режим зовнішнього середовища.

В даній роботі розглядається кругла двохступенева пластинка, яка нагрівається зовнішнім середовищем температури t_c по торцевій поверхні $r = r_2$, а через бокові поверхні $z = \pm\delta_1$, $z = \pm\delta_2$ пластинки здійснюється теплообмін з зовнішнім середовищем температури t_c згідно з законом Ньютона.

2. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ.

Аналіз публікацій показує відсутність систематизованих теоретичних досліджень і числового аналізу щодо проблеми впливу температури зовнішнього середовища на виникнення температурних зусиль в ступеневих елементах конструкції.

3. МЕТА РОБОТИ

Провести дослідження впливу температури зовнішнього середовища на виникнення зусиль у ступеневій пластині.

4.ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА.

Півтовщину двохступеневої пластинки представимо в вигляді [1]

$$\delta(r) = \delta_1 + (\delta_2 - \delta_1) S_+(r - r_1), \tag{1}$$

де δ_1 і δ_2 – півтовщини пластинок $r \le r_1$ і $r_1 < r \le r_2$ відповіно,

[31] Українська академія друкарства

$$S_+(r-r_1)=\begin{Bmatrix}0, \; r\le r_1\\ 1, \; r>r_1\end{Bmatrix}$$ – одинична функція Хевісайда.

Підставивши (1) в рівняння теплопровідності, яке в цьому випадку має вигляд [2]

$$\Delta T+\frac{\delta_r}{\delta}\frac{dT}{dr}-\frac{h}{\delta}\left(T-t_c\right)=0 \qquad (2)$$

отримаємо диференціальне рівняння

$$\Delta\theta-\chi_1^2\theta-\left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)\theta S_+(r-r_1)=(1-\varepsilon)\frac{d\theta}{dr}\bigg|_{r=r_1}\delta_+(r-r_1), \qquad (3)$$

тут $\theta=T-t_c$, $\chi_i^2=\dfrac{h_i}{\delta_i}$, ($i$=1, 2), $\varepsilon=\dfrac{\delta_1}{\delta_2}$, h_1 і h_2 – відносні коефіцієнти тепловіддачі відповідно з поверхонь $z=\pm\delta_1$ і $z=\pm\delta_2$, $\delta_r=\dfrac{d\delta}{dr}$, $\Delta=\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}$ – оператор Лапласа.

Граничні умови мають вигляд:

$$\theta\bigg|_{r=r_2}=t_c^S-t_c=t_S\,,\; \frac{d\theta}{dr}\bigg|_{r=0}=0 \qquad (4)$$

Загальний розв'язок рівняння (3) з врахуванням граничних умов (4) є:

$$\theta=\frac{t_S}{\psi(r_1,r_2)}\left[I_0(\chi_1 r)+\psi(r)S_+(r-r_1)\right], \qquad (5)$$

де $\psi(r)=\psi(r_1,r_2)-I_0(\chi_1\, r)$,

$\psi(r_1,r_2)=q_{IK}^{+}(r_1)I_0(\chi_2\, r_2)+q_{II}^{-}(r_1)K_0(\chi_2\, r_2)$,

$q_{VW}^{\pm}=r_1\left[\chi_2 V_0(\chi_1\, r_1)W_1(\chi_2\, r_1)\pm\dfrac{\chi_1}{\varepsilon}V_1(\chi_1\, r_1)W_0(\chi_2\, r_1)\right]$,

I_0, I_1 – функції Бесселя першого роду, нульового і першого порядку відповідно, K_0 і K_1 – функції Макдональда нульового і першого порядку відповідно.

Враховуючи температурне поле (5) отримаємо диференціальне рівняння для визначення радіального зусилля N_r

$$\frac{d^2N_r}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{dN_r}{dr}=\left[(\varepsilon-1)\frac{dN_r}{dr}\bigg|_{r=r_1}+\frac{(1-\nu)(\varepsilon-1)}{r_1}N_r\bigg|_{r=r_1}\right]\times$$

$$\times\delta_+(r-r_1)-\frac{2\alpha_t E}{r}\frac{d\theta}{dr}\left[\delta_1+(\delta_2-\delta_1)S_+(r-r_1)\right],\qquad(6)$$

розв'язок якого із врахуванням обмеження зусилля N_r в центрі пластинки знаходимо у вигляді:

$$N_r=-\frac{2\alpha_t Et_S\delta_1}{\psi(r_1,r_2)}\Bigg\langle\frac{\varepsilon-1}{2(2-\varepsilon)\chi_1 r_1}\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)\{[(1-\nu)(\varepsilon-1)-2]\times$$

$$\times I_1(\chi_1 r_1)+\chi_1 r_1\psi(r_1,r_2)+(1-\nu)(2-\varepsilon)I_1(\chi_1 r_1)\}S_+(r-r_1)+$$

$$+\frac{I_1(\chi_1 r_1)}{\chi_1 r_1}S_-(r_1-r)+\left[\frac{r_1 I_1(\chi_1 r_1)}{\chi_1 r^2}+\frac{1}{2}q_{IK}^+(r_1)\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)I_0(\chi_2 r_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}q_{II}^-(r_1)\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)K_0(\chi_2 r_1)\right]S_+(r-r_1)+\varepsilon\{q_{IK}^+(r_1)\times$$

$$\times\left[\frac{I_1(\chi_2 r)}{\chi_2 r}-\frac{r_1 I_1(\chi_2 r_1)}{\chi_2 r^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)I_0(\chi_2 r_1)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{r_1 K_1(\chi_2 r_1)}{\chi_2 r^2}-\frac{K_1(\chi_2 r)}{\chi_2 r}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)I_0(\chi_2 r_1)\right]S_+(r-r_1)+q_{II}^-(r_1)\times$$

$$\times\left[\frac{r_1 K_1(\chi_2 r_1)}{\chi_2 r^2}-\frac{K_1(\chi_2 r)}{\chi_2 r}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{r_2}\right)I_0(\chi_2 r_1)\right]S_+(r-r_1)+q_{II}^-(r_1)\times$$

$$\times\left[\frac{r_1 K_1(\chi_2 r_1)}{\chi_2 r_2}-\frac{K_1(\chi_2 r)}{\chi_2 r}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{r_2}\right)K_0(\chi_2 r_1)\right]S_+(r-r_1)\}\Bigg\rangle+$$

$$+\frac{c}{2}\left[1+\frac{1-\nu}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{r_2}\right)\left(\frac{\varepsilon-1}{2-\varepsilon}\right)S_+(r-r_1)\right],\qquad(7)$$

тут α_t – коефіцієнт лінійного розширення. E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, $\delta_+(r-r_1)$ – дельта функція Дірака.

Знаючи радіальне зусилля N_r, кільцеве зусилля N_φ знаходимо із умови рівноваги $N_\varphi = \frac{\partial(rN_r)}{\partial r}$ у вигляді:

$$N_\varphi = -\frac{2\alpha_t E t_S \delta_1}{\psi(r_1, r_2)} \left\langle \frac{\varepsilon - 1}{2\chi_1 r_1 (2-\varepsilon)} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) \{[(1-\nu)(\varepsilon - 1) - 2] \times \right.$$

$$\times I_1(\chi_1 r_1) + \chi_1 r_1 \psi(r_1, r_1) + (1-\nu)(2-\varepsilon) I_0(\chi_1 r_1)\} S_+(r - r_1) +$$

$$+ \left[I_0(\chi_1 r) - \frac{I_1(\chi_1 r)}{\chi_1 r}\right] S_+(r_1 - r) - \left[\frac{r_1 I_1(\chi_1 r_1)}{\chi_1 r_2} - \frac{1}{2} q_{IK}^+(r_1)\left(1 + \frac{r_1^2}{r_2}\right) \times\right.$$

$$\left.\times I_0(\chi_2 r_1) - \frac{1}{2} q_{II}^-(r_1)\left(1 + \frac{r_1^2}{r_2}\right) K_0(\chi_2 r_1)\right] S_+(r - r_1) + \varepsilon\{q_{IK}^+(r_1) \times$$

$$\times \left[I_0(\chi_2 r) - \frac{I_1(\chi_2 r)}{\chi_2 r} + \frac{r_1 I_1(\chi_2 r_1)}{\chi_2 r^2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) I_0(\chi_2 r_1)\right] S_+(r - r_1) \times$$

$$\times q_{II}^-(r_1)\left[K_0(\chi_2 r) - \frac{r_1 K_1(\chi_2 r)}{\chi_2 r^2} + \frac{K_1(\chi_2 r)}{\chi_2 r} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) K_0(\chi_2 r_1)\right] \times$$

$$\left. \times S_+(r - r_1)\}\right\rangle + \frac{c}{2}\left[1 - \frac{1-\nu}{2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2}\right) S_+(r - r_1)\right]. \quad (8)$$

Постійна інтегрування C визначається із граничних умов

$$C = \frac{4\alpha_t E t_S \delta_1}{\psi(r_1, r_2)} \left\langle \frac{\varepsilon - 1}{2 r_1 \chi_1 (2-\varepsilon)} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \{[(1-\nu)(\varepsilon - 1) - 2] I_1(\chi_1 r_1) + \right.$$

$$+ \chi_1 r_1 \psi(r_1, r_1) + (1-\nu)(2-\varepsilon) I_1(\chi_1 r_1)\} + \frac{r_1 I_1(\chi_1 r_1)}{\chi_1^2 r_2^2} + \frac{1}{2} q_{IK}^+(r_1) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) I_0(\chi_2 r_1) + \frac{1}{2} q_{II}^-(r_1)\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) K_0(\chi_2 r_1) + \varepsilon\{q_{IK}^+(r_1) \times$$

$$\times\left[\frac{I_1(\chi_2 r_2)}{\chi_2 r_2}-\frac{r_1 I_1(\chi_2 r_1)}{\chi_2 r_2^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)I_0(\chi_2 r_1)\right]+q_{II}^{-}(r_1)\left[\frac{r_1 K_1(\chi_2 r_1)}{\chi_2 r_2^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{K_1(\chi_2 r_2)}{\chi_2 r_2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)K_0(\chi_2 r_1)\right]\Bigg\}\Bigg\rangle\left[1-\frac{1-\nu}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-2}\right)\right]^{-1}$$

Проведено розрахунки для зусиль

$N_{rr}=\dfrac{N_r}{2\alpha_t E t_S \delta_1}$, $N_{\varphi\varphi}=\dfrac{N_\varphi}{2\alpha_t E t_S \delta_1}$ в залежності в $\rho=\dfrac{r}{r_2}$ при $B_{i1}=\dfrac{\alpha_1\delta_1}{\lambda_t}=0{,}01$ і $B_{i2}=\dfrac{\alpha_2\delta_2}{\lambda_t}=0{,}01$, $\delta_1=\delta_2=1\ \text{ñì}$ (пластинка постійної товщини, рис. 1 і 2 – криві 1) і $B_{i1}=0{,}01$, $B_{i2}=0{,}005$, $\delta_2=0{,}5\ \text{ñì}$, $r_1=12\ \text{ñì}$, $r_2=24\ \text{ñì}$, $\nu=0{,}3$ (рис. 1 і 2 – криві 2)

5. ВИСНОВКИ

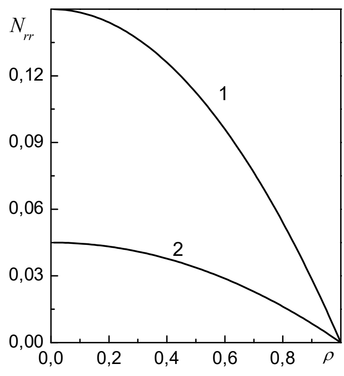

Рис. 1. Залежність радіального зусилля N_{rr} від безрозмірного радіуса ρ

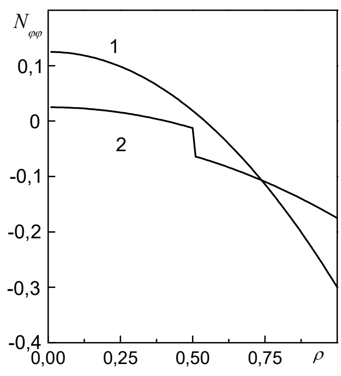

Рис. 2. Зусилля радіального зусилля N_φ від безрозмірного радіуса ρ

Результати обрахунків приведені на графіках із яких видно, що зусилля N_r – неперервне і розтягуюче по всій області пластинки.

Зусилля N_φ переходить із області розтягу в область стику і у випадку ступеневої пластинки воно терпить розрив на границі зміни товщини. Радіальні зусилля досягають свого найбільшого значення в центрі пластинки, а кільцеві на краю пластинки.

1. Коляно Ю.М., Пушак Я.С. Термоупругость двухступенчатых круглых пластин с теплоотдачей.– Проблемы прочности. 1978, №2. - С. 36-38.
2. Пушак Я.С. Термоупругость кольцевой многоступенчатой пластины. В кн.: Термомеханические процессы в кусочнооднородных елементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1978. - С.98-103.