УДК 621.39
© **И. Стрелковская**[10]**, Т. Григорьева**[1]**, 2011**

СПЛАЙН-МАТРИЦЫ В ПРОЦЕДУРЕ РЕКУРСИВНОЙ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ СЕТЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ РЕЖИМОВ

Розглянуто частковий випадок тензорного сплайну другої валентності – сплайн-матриці. Запропоновано застосування сплайн-матриці при використанні процедури оцінки станів мережевих елементів на основі фільтра Калмана-Бьюсі та сплайн-апроксимації.

Isolated case of second valency tensor spline - spline-matrices is considered. Using spline-matrices is offered in the procedure of estimation for states of network elements on the basis of Kalman-Bucy filter and spline approximation.

1. ВВЕДЕНИЕ

Фильтр Калмана-Бьюси (ФКБ) во многом является универсальной процедурой, пригодной для решения задач оценки, как случайных величин, так и случайных процессов и может быть непосредственно использован в задачах управления сетевыми элементами и сетью в целом. Большим достоинством задач по применению ФКБ является общность методологии с задачами создания процедуры оптимального динамического управления, что с единых позиций позволяет модернизировать многие задачи сетевого управления.

В [1] рассматриваются задачи, связанные с получением оптимальных стохастических оценок. При этом в качестве процедур оценивания рассматриваются, используемые в существующих технологиях, рекурсивные процедуры, к числу которых относятся процедуры стохастической аппроксимации, линейной и нелинейной фильтрации, в частности, процедуры фильтров Калмана-Бьюси. Был проведен анализ эффективности стационарного режима фильтра Калмана-Бьюси в случае согласования его параметров с параметрами выбранной модели, который показывает, что точность последовательности оценок, получаемых по методу Калмана-Бьюси, является ничем иным, как результатом линейной интерполяции. Она может быть значительно улучшена за счет аппроксимации кубическими сплайнами. Таким образом, линейную оценку, полученную по алгоритму ФКБ, можно улучшить, подвергнув дополнительной нелинейной обработке последовательности этих оценок. Причем эта эффективность возрастает с увеличением шага дис-

[10] Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

кретизации. Данный шаг не всегда может быть выбран достаточно малым. Чаще он уже задан в той или иной технологии. Так, получаемые оценки времени кругового обращения RTT, количество которых приходится по числу выборок на интервале корреляции до 3-5, можно улучшить. При этом за счет интервальной оценки уменьшается апостериорная дисперсия ошибки оценки на 4-6 дБ.

Итак, в [1] рассмотрена процедура рекурсивной оценки состояния сетевого элемента или его функции. Полученные оценки могут иметь самостоятельное значение или же они далее используются для управления режимами сетевых элементов или структурной сети [2]. В [1] показан анализ качества сплайн-аппроксимации в результатах рекурсивной оценки состояния сетевых элементов и их режимов. Цель настоящей работы: разработать математичекий аппарат, позволяющий рассматривать процедуру рекурсивной оценки m состояний сетевых элементов и их режимов.

2. СПЛАЙН-МАТРИЦЫ

Введем в рассмотрение частный случай тензорного сплайна второй валентности [3] – сплайн-матрицы и некоторые действия над ними.

Рассмотрим, согласно [4], на отрезке $[a,b]$ разбиение $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$. Для целого $k \geq 0$ через $C^k = C^k[a,b]$ обозначим множество k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, а через $C^{-1}[a,b]$ - множество кусочно-непрерыных функций с точками разрыва первого рода.

Определение [4]. Функция $S_{n,v}(x)$ называется сплайном степени n дефекта v (v - целое число, $0 \leq v \leq n+1$) с узлами на сетке Δ, если

а) на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция $S_{n,v}(x)$ является многочленом степени n, т.е.

$$S_{n,v}(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha^i (x - x_i)^\alpha \text{ для } x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...,N-1;$$

б) $S_{n,v}(x) \in C^{n-v}[a,b]$.

Рассмотрим в прямоугольной области $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ сетку линий $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, где

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b,$$
$$\Delta_y : c = y_0 < y_1 < ... < y_M = d,$$

делящую область на прямоугольные ячейки

$$\Omega_{i,j} = \{(x,y) \mid x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_i, y_{i+1}]\},$$
$$i = 0,\dots,N-1;\ j = 0,\dots,M-1.$$

Для целых $k \geq 0$ и $l \geq 0$ через $C^{k,l}[\Omega]$ обозначим множество непрерывных на Ω функций $f(x,y)$, имеющих непрерывные частные и смешанные производные $D^{r,s} f(x,y)$ $(r \leq k, s \leq l)$. Символом $C^{-l,}[\Omega]$ обозначается множество кусочно-непрерывных функций с разрывами первого рода на некоторых замкнутых линиях, содержащих, быть может, границы области.

Определение[4]. Функция $S_{n,m,\nu,\mu}(x,y)$ называется сплайном двух переменных степени n и дефекта ν $(0 \leq \nu \leq n+1)$ по x и степени m дефекта μ $(0 \leq \mu \leq m+1)$ по y с линиями склейки на сетке Δ, если

а) в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$ функция $S_{n,m,\nu,\mu}(x)$ является многочленом степени n по x и степени m по y, т.е.

$$S_{n,m,\nu,\mu}(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{\beta=0}^{m} a_{\alpha,\beta}^{i,j} (x - x_i)^{\alpha} (y - y_j)^{\beta},$$

$i = 0,\dots,N-1;\ j = 0,\dots,M-1;$

б) $S_{n,m,\nu,\mu}(x,y) \in C^{n-\nu,m-\mu}[\Omega]$.

Множество сплайнов, удовлетворяющих определению, обозначим через $S_{n,m,\nu,\mu}(\Delta)$. Оно является линейным пространством.

Рассмотрим сплайн $S_{n,\nu}(x)$ одной переменной x степени n дефекта ν $(0 \leq \nu \leq n+1)$, сплайн $R_{m,\mu}(y)$ одной переменной y степени m дефекта μ $(0 \leq \mu \leq m+1)$ и сплайн $G_{n,m,\nu,\mu}(x,y)$ двух переменных x и y степени n дефекта ν по x и степени m дефекта μ по y с линиями склейки на сетке Δ.

Введём в рассмотрение сплайн-матрицы одной и двух переменных.

Определение. Сплайн-матрицей $S_{m\times n}(x)$ размерности $m \times n$ одной переменной x назовём матрицу размерности $m \times n$, элементами которой являются сплайн-функции одной переменной $S_{ij} = S_{ij}(x) = S_{n,\nu}(x)$, где $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$.

Аналогично, определим сплайн-матрицу двух переменных.

Определение. Сплайн-матрицей $G_{m\times n}(x,y)$ размерности $m \times n$ двух переменных x и y назовём матрицу размерности $m \times n$, элементами которой являются сплайны двух переменных $G_{ij} = G_{ij}(x,y) = G_{n,m,\nu,\mu}(x,y)$, где $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.

Определение. Сплайн-матрицу, содержащую один столбец или одну строку, будем называть сплайн-вектором (сплайн-вектор-столбец или сплайн-вектор-строка соответственно).

3. ДЕЙСТВИЯ НАД СПЛАЙН-МАТРИЦАМИ

Введем операцию сложения сплайн-матриц следующим образом. Будем складывать сплайн-матрицы одной размерности при условии, что их соответствующие элементы имеют одну сетку разбиения.

Определение. Суммой сплайн-матриц $S_{m\times n}(x)$ и $M_{m\times n}(x)$ одной размерности $m\times n$ будем называть сплайн-матрицу $T_{m\times n}(x)$ той же размерности $m\times n$, каждый элемент которой есть сумма соответствующих элементов слагаемых

$$S_{ij}(x) + M_{ij}(x) = T_{ij}(x).$$

Таким образом, $S_{m\times n}(x) + M_{m\times n}(x) = T_{m\times n}(x)$.

Аналогично будем складывать сплайн-матрицы двух переменных – поэлементно:

$$S_{m\times n}(x,y) + M_{m\times n}(x,y) = T_{m\times n}(x,y),$$

где

$$S_{ij}(x,y) + M_{ij}(x,y) = T_{ij}(x,y). \tag{1}$$

Операцию умножения сплайн-матрицы на сплайн-функцию введем, опираясь на правило умноження сплайн-функций [4].

Определение. Произведением сплайн-матрицы $S_{m\times n}(x)$ размерности $m\times n$ переменной x и сплайн-функции $R(y)$ будем называть сплайн-матрицу $G_{m\times n}$ размерности $m\times n$, элементы которой

$$G_{ij} = S_{ij}(x)\cdot R(y). \tag{2}$$

Теорема. Произведением сплайн-матрицы одной переменной размерности $m\times n$ $S_{m\times n}(x)$ и сплайн-функции $R(y)$ является сплайн-матрица размерности $m\times n$ двух переменных $G_{m\times n}(x,y)$.

Доказательство.

В [4] доказано, что тензорное произведение двух пространств сплайнов одной переменной совпадает с пространством сплайнов двух переменных, т.е.

$$S_{n,\nu}(\Delta_x)\otimes R_{m,\mu}(\Delta_y) = G_{n,m,\nu,\mu}(\Delta).$$

Таким образом, при умножении каждого элемента $S_{ij}(x)$ сплайн-матрицы $S_{m\times n}(x)$ на сплайн-функцию $R(y)$ будем получать сплайн-функции двух переменных:

$$G_{ij}(x,y)=S_{ij}(x)\cdot R(y),$$

которые являются элементами сплайн-матрицы $G_{m\times n}(x,y)$.

Введем в рассмотрение операцию умножения сплайн-матриц следующим образом.

Определение. Произведением сплайн-матрицы $S_{m\times n}(x)$ размерности $m\times n$ переменной x на сплайн-матрицу $R_{n\times p}(y)$ размерности $n\times p$ переменной y будем называть сплайн-матрицу $G_{m\times p}$ размерности $m\times p$, элементы которой находятся по формуле

$$G_{ik}=\sum_{\alpha=1}^{n}S_{i\alpha}(x)\cdot R_{\alpha k}(y), \tag{3}$$

где $i=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,p$.

Теорема. Произведением сплайн-матрицы $S_{m\times n}(x)$ переменной x на сплайн-матрицу $R_{n\times p}(y)$ переменной y является сплайн-матрица двух переменных $G_{m\times p}(x,y)$.

Доказательство.

При умножении сплайнов $S_{i\alpha}(x)$ и $R_{\alpha k}(y)$ в (3), согласно[4], будем получать сплайн двух переменных: $G_{i\alpha k}(x,y)=S_{i\alpha}(x)\cdot R_{\alpha k}(y)$, где $\alpha=1,\ldots,n$. А сумма сплайнов двух переменных, учитывая (1), есть сплайн двух переменных: $G_{ik}(x,y)=\sum_{\alpha=1}^{n}G_{i\alpha k}(x,y)$, каждый из которых является элементом сплайн-матрицы $G_{m\times p}(x,y)$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-МАТРИЦ В РЕЗУЛЬТАТАХ РЕКУРСИВНОЙ ОЦЕНКИ m СОСТОЯНИЙ СЕТЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ РЕЖИМОВ

В [1] показано, что широко используемые в телекоммуникационных технологиях с пакетной передачей рекурсивные процедуры оценки состояния сетевых элементов (времени запаздывания, объема буфера и др.) могут быть значительно улучшены при аппроксимации кубической сплайн-функцией. Для оценки m состояний сетевых элементов и их режимов будем использовать процедуры линейной рекурсивной оценки, в частности фильтр Калмана-Бьюси. Это дает возможность использовать данные оценки при синтезе задач управления, что в целом позволяет оптимизировать указанные процедуры управления.

В [1] рассмотрена процедура рекурсивной оценки соответствующего состояния $x(k)$, $k=1,...,n$ сетевого элемента или его функции. Обобщим эту задачу и рассмотрим случай m состояний $x_i(k)$, $i=1,...,m$, $k=1,...,n$. Обозначим $x_{ik}=x_i(k)$. Применим сплайн-матрицы для получения рекурсивных оценок для m состояний. Для этого рассмотрим матрицу размерности $m\times n$ с элементами x_{ik}: $X_{m\times n}=\|x_{ik}\|$. Рассмотрим матрицу $X^0_{m\times n}=\|x^0_{ik}\|$, где $x^0_{ik}=x^0_i(k)$ - значения первоначальных функций. Качество оценки будем улучшать, по аналогии с [1], за счет интерполяции оцениваемого процесса между соседними его отсчетами $\frown{x}_{ik}=\frown{x}_i(k)$. В [1] показано, что аппроксимация отсчетов сплайнами дает меньшую апостериорную дисперсию значений. Обозначим через $\widehat{S}_{ik}=\widehat{S}_i(k)$ - значение i-той сплайн-функции на k–м шаге ($i=1,...,m$, $k=1,...,n$). Рассмотрим сплайн-матрицу, элементами которой являются кубические сплайны $\widehat{S}_{ik}$, определенные в [1]. Нетрудно получить графики первоначальной выборки $x^0_i(k)$, оценки сплайн-аппроксимации $\widehat{S}_i(k)$ и оценки, полученные по процедуре фильтрации ФКБ. Шаг дискретизации $\Delta t/\tau_{kop}=1/10$.

Для оценки апостериорной дисперсии ошибки оценки по процедуре ФКБ будем использовать формулу:

$$\sigma^2_{\widehat{x}_i}=\tfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\widehat{x}_{ik}-x_{ik})^2\ ,\ n=100\,.$$

Дисперсия ошибки интерполяции сплайнами будем вычислять на каждом из $k=10000$ шагах по аналогичной формуле:

$$\sigma^2_{\widehat{S}_i}=\tfrac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(\widehat{S}_{ik}-x_{ik})^2\ ,\ N=10000\,.$$

Итак, показана возможность получения более точной интервальной оценки случайных процессов и сигналов за счет нелинейной сплайн-аппроксимации результатов линейного оценивания m состояний сетевых элементов и сетей в целом, то есть показано, что при интерполяции последовательности оценок, получаемых по методу Калмана-Бьюси, аппроксимация кубическими сплайнами, которые являются элементами сплайн-матриц, более эффективна, чем линейными.

4. ВЫВОДЫ

1. Разработан математический аппарат: сплайн-матрицы, позволяющий рассматривать процедуру рекурсивной оценки m состояний сетевых элементов и их режимов.

2. Предложено применение сплайн-матрицы в результатах рекурсивной оценки m состояний сетевых элементов и их режимов на основе фильтра Калмана-Бьюси и сплайн-аппроксимации.

3. Широко используемые в телекоммуникационных технологиях с пакетной передачей рекурсивные процедуры оценки m состояний сетевых элементов могут быть значительно улучшены, их апостериорные дисперсии ошибки оценки могут быть, по аналогии с [1], уменьшены в 4-6 раз.

1. Поповский В. В., Стрелковская И.В., Бухан Д.Ю. Анализ качества сплайн-аппроксимации в результатах рекурсивной оценки состояния сетевых элементов и их режимов. / Наукові записки УНДІЗ, №3(5), 2008. – С. 29-33. 2. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем: За загальною редакцією В. В. Поповського. – Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 564 с. 3. Стрелковская И.В., Григорьева Т.И. Тензорные сплайны в задачах восстановления дискретизированных случайных процессов и полей. Радиотехника: Всеукр. науч.-техн. сб., Вып. 151, 2007. 4. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. – 352 с.