

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВІ АТЕВ – ФУНКЦІЙ

Здійснено моделювання періодичних процесів у коливних системах на основі Атев-функцій без збурень. Розглянуто типи малих збурень, які діють на коливну систему. Розроблено відповідне програмне забезпечення, яке подає результати у графічному і табличному вигляді.

A simulation of periodic processes in vibration systems based on Ateb-functions without perturbation was done. The types of small perturbations that act on the vibration system are considered. Appropriate software that provides results in graphical and tabular form is developed.

1. ВСТУП

Нелінійні коливні системи з одним степенем вільності зустрічаються у багатьох галузях науки та техніки, зокрема у задачах механіки. Одним з методів дослідження є впровадження у систему малих збурень. Аналіз руху таких систем ґрунтується на знаходженні частинних розв'язків системи диференціальних рівнянь без збурення. Ці розв'язки вдається побудувати за допомогою періодичних Атев-функцій [1]. Найефективнішими методами дослідження коливних процесів нелінійних систем з малим збуренням є асимптотичні методи нелінійної механіки [2].

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблема моделювання періодичних процесів у нелінійних системах, задача побудови та прогнозування поведінки таких систем є надзвичайно практично важливими. Це зумовлює актуальність розробки методів моделювання таких систем. Запропонована модель нелінійної коливної системи з одним степенем вільності, рух якої описується системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку та розв'язана задача моделювання на основі теорії Атев-функцій. Результати роботи авторів над моделюванням поведінки коливної системи без збурення та з малими збуреннями представлено у даній статті.

¹ Національний університет “Львівська політехніка”

3. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

У [3] розглянуто нелінійні коливні системи з одним ступенем вільності з малим збуренням, рух яких описується системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з малим параметром ε .

$$\begin{cases} \dot{y} - \alpha_1 x^n = \varepsilon f(x, y, \mu t) \\ \dot{x} - \alpha_2 y^m = \varepsilon g(x, y, \mu t) \end{cases} \quad (1)$$

де x, y – фазові координати руху точок; α_1, α_2 – сталі причому $\alpha_1 \alpha_2 > 0$; $\varepsilon f(x, y, \mu t), \varepsilon g(x, y, \mu t)$ – довільні аналітичні функції; δ, n – числа вигляду

$$m = \frac{2\mu_1^{**} + 1}{2\mu_2^{**} + 1}, n = \frac{2\mu_1^{**} + 1}{2\mu_2^{**} + 1}; \mu_1^{**}, \mu_2^{**}, \mu_1^*, \mu_2^* = 0, 1, 2, \dots$$

Доведено що аналітичний розв'язок системи (1) представляється у вигляді Атеб - функції.

4. ФОРМУВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ

Метою даної роботи є побудова методу моделювання періодичних процесів у коливних системах без збурень та моделювання малих збурень. Показано, що рух такої системи описується системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з малим параметром та аналітичні розв'язки цієї системи будуються на основі теорії Атеб-функцій. Незважаючи на аналітичний запис розв'язку, для прорахунку поведінки системи необхідно розробити спеціальні методи обчислень результатів, що пов'язане з неявною формою представлення розв'язку у аналітичному вигляді. Представляє практичний інтерес моделювання поведінки розв'язку у залежності від вхідних параметрів. Ці задачі розв'язані у даній статті, результати розрахунків представлені у вигляді відповідних графіків.

5. ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Розв'язок незбурених рівнянь (1) шукатимемо у амплітудно – фазових змінних за допомогою заміни змінних вигляду :

$$y = u(\alpha, \varphi), x = v(\alpha, u), \quad (2)$$

де $u(\alpha, \varphi), v(\alpha, u) - 2\Pi(m, n)$ – періодичні по φ , що задовольняють умови:

$$v(\alpha, u)_{\varphi=k\Pi(m, n)} = (-1)^k \alpha, \quad (3)$$

$$v(\alpha, u)_{u=\pm a} = 0,$$

Із першого співвідношення заміни (2) і умов (3), накладених на функцію $u(\alpha, \varphi)$, випливає що $\alpha = \max u$, тому надалі називатимемо параметр α амплітудою фазової координати u (амплітудою коливань), а φ - фазою коливань.

Підставляючи розв'язок (2) у вихідну незбурену систему рівнянь (1), отримаємо систему диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \omega(\alpha) - \alpha_1 v^n(\alpha, u) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \omega(\alpha) + \alpha_2 u^m(\alpha, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Інтегруючи систему диференціальних рівнянь (4) за умов (3), отримаємо

$$\begin{cases} v(\alpha, u) = (-1)^k \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{n+1}{m+1} (\alpha^{m+1} - u^{m+1}) \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ \varphi = 2(r-1)\pi - \frac{\omega(\alpha)}{m} \int_{\alpha}^u \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{n+1}{m+2} (\alpha^{m+1} - u^{-m+1}) \right)^{\frac{n}{n+1}} d\bar{u} \end{cases} \quad (5)$$

при

$$\begin{cases} -\alpha \leq u \leq \alpha \\ (2r-1)\Pi \leq \varphi \leq 2r\Pi \end{cases} \quad (7)$$

де $k=1$ для $-\alpha \leq u \leq \alpha$ і $k=2$ для $\alpha \geq u \geq -\alpha$.

Співвідношення (5), (6) є неявними виразами для знаходження функції $u(\alpha, \varphi)$. Цю функцію можна виразити через Атеб-функції у вигляді [4]:

$$u = Ca(m, n, l\varphi) \quad (8)$$

В останній залежності константа l визначається із умови (m, n) -періодичності по φ отриманої функції.

Аналогічно отримаємо вираз для $v(\alpha, u)$ через синус Ateb-функції:

$$v(a, u) = a^{\frac{m+1}{n+1}} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{n+1}{m+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} Sa(n, m, l\varphi) \quad (9)$$

із (m, n) - періодичності по φ розв'язку незбуреної системи знаходимо:

$$\omega(a) = \frac{\alpha_1(m+1)}{2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{n+1}{m+2} \right)^{\frac{n}{n+1}} a^{\frac{nm-1}{1+n}} \quad (10)$$

Таким чином показано, що динамічні процеси досліджуваних нелінійних систем описуються за допомогою Ateb-функцій. Представляє значний науковий та практичний інтерес обчислення розв'язків незбуреної системи (1) у вигляді (8),(9), що реалізовано у даній статті, а також обчислення впливу малих збурень на розв'язок системи.

Для програмної реалізації математичної моделі періодичних процесів у нелінійних системах за основу вибрано співвідношення (8) і (9). Для обчислень використано алгоритм пошуку значень Ateb-функцій косинуса і синуса $Sa(n, m, l\varphi)$, $Ca(m, n, l\varphi)$ який представлено у роботі [5]. На цій основі розроблено відповідне програмне забезпечення. До вхідних даних, які використовуються у обчисленнях, належать значення коефіцієнтів m, n, α_1, α_2 і значення амплітуди α . Результатом обчислення є фазові координати руху точок x та y і параметр $\omega(\alpha)$. Результатом роботи програми є табличне подання (рис. 1) і графічне зображення вихідних даних(рис. 2, 3).

Опишемо реалізований нами алгоритм. На початковому етапі вказуємо параметри m, n, α_1, α_2 і α , при цьому перевіряємо умову періодичності. Далі табулюємо Ateb-функції залежні від значень заданих параметрів m, n . Розроблена програма обчислює значення фазових координат x та y за формулами (8) і (9), і заповнює таблицю результатів. Початково графік будується лише на чверть періоду, але знаючи що наша функція є періодичною, із значенням періоду (m, n) , продовжуємо графік на весь період. Застосовано результати обчислення для побудови трьохвимірних графіків залежності значень фазових координат від параметрів α_1, α_2 (рис. 4).

| № | a | Cos | Sin | X | Y | Омега |
|---|-------------|------------|-------------|------------|-------------|--------------|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0,5498140978 |
| 2 | 0,1 | 0,84765625 | 0,182273942 | 0,84765625 | 0,167502123 | 0,5498140978 |
| 3 | 0,2 | 0,67578125 | 0,361836980 | 0,67578125 | 0,332513040 | 0,5498140978 |
| 4 | 0,3 | 0,48828125 | 0,547223680 | 0,48828125 | 0,502875656 | 0,5498140978 |
| 5 | 0,4 | 0,30078125 | 0,725708336 | 0,30078125 | 0,666895586 | 0,5498140978 |
| 6 | 0,5 | 0,10546875 | 0,905795063 | 0,10546875 | 0,832387751 | 0,5498140978 |
| 7 | 0,555167030 | 0 | 1 | 0 | 0,918958144 | 0,5498140978 |

Рис. 1. Обчисленні значення фазових координат x та y параметра $\omega(\alpha)$ для значень $n=0,01$ $m=0,1$.

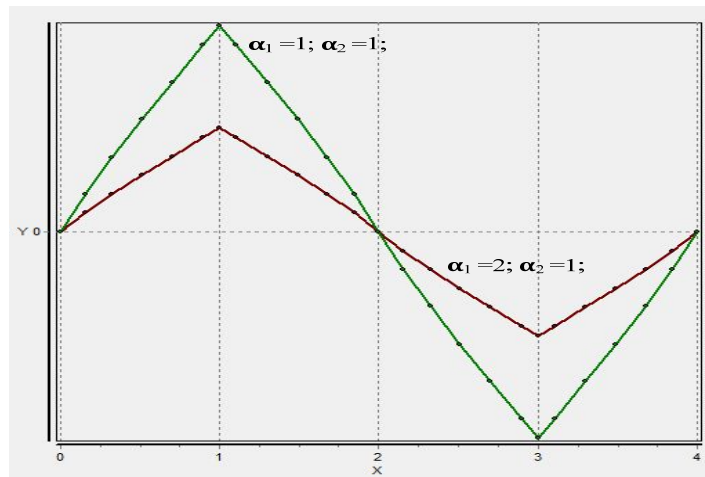


Рис. 2. Графік руху точки (x,y) для значень $n=0,01$ $m=0,1$ і $\alpha_1=1, \alpha_1=2, \alpha_2=1$.

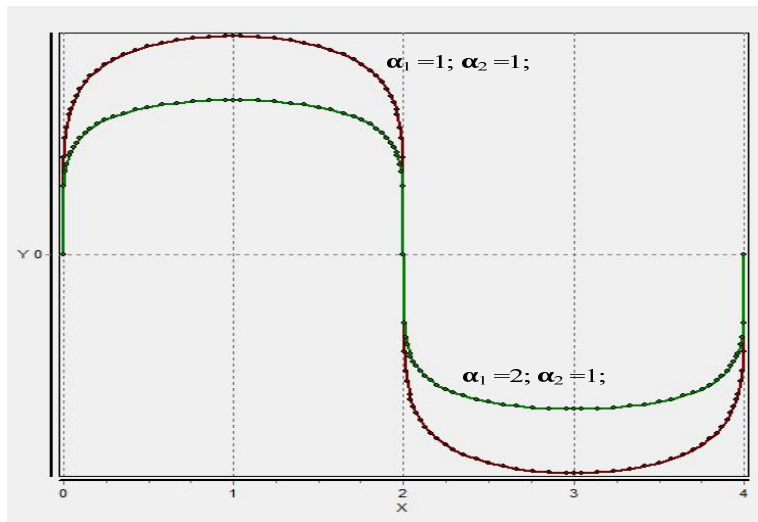


Рис. 3. Графік руху точки (x,y) для значень $n=1, m=5$ і $\alpha_1 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$.

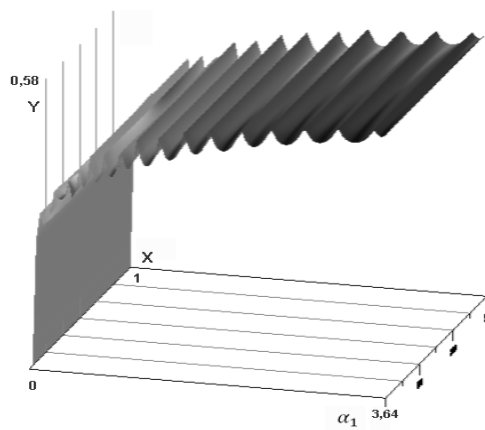


Рис. 4. Графік зміни руху в залежності від зміни параметра α_1 .

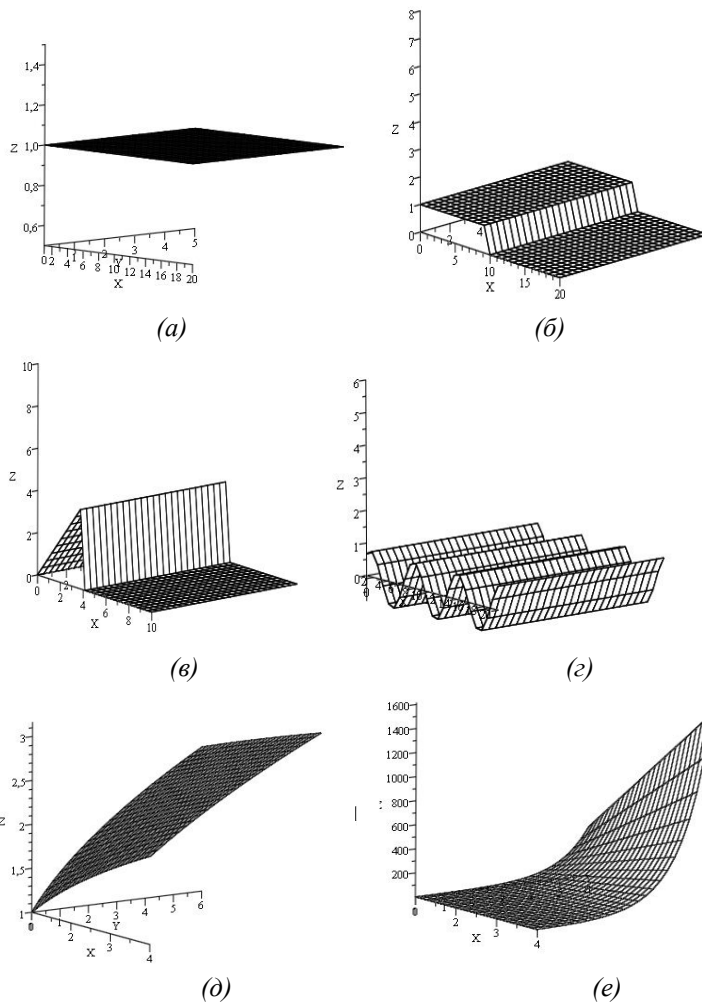


Рис. 5. Графічне зображення збурень.

Змодельовавши поведінку системи при незбурених коливаннях, наступним кроком є моделювання процесів у нелінійних коливних системах з малим збуренням. Будемо розглядати наступні види збурення, представлені на рис.5 а, б, в, г, д, е. Формули, за якими проведено збурення представлені в (11 - 16).

$$f(x, y) = A_\epsilon; g(x, y) = B_\epsilon \quad (11)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} A_\varepsilon, & x < \text{const} \\ 0, & x \geq \text{const} \end{cases}, \quad g(x, y) = \begin{cases} B_\varepsilon, & y < \text{const} \\ 0, & y \geq \text{const} \end{cases}, \quad (12)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & x < \text{const} \\ 0, & x \geq \text{const} \end{cases}, \quad g(x, y) = \begin{cases} y, & y < \text{const} \\ 0, & y \geq \text{const} \end{cases}, \quad (13)$$

$$f(x, y) = A_\varepsilon \sin(x), \quad g(x, y) = B_\varepsilon \sin(y) \quad (14)$$

$$f(x, y) = (x + y)^{A_\varepsilon}, \quad g(x, y) = (x + y)^{B_\varepsilon} \quad (15)$$

$$f(x, y) = x \cdot \exp(y), \quad g(x, y) = y \cdot \exp(x) \quad (16)$$

У формулі (11) показано постійне збурення, у (12) представлено стрибкоподібне збурення, у (13) лінійне на певному проміжку, у (14) – періодичне збурення, у (15) – степеневе збурення, у (16) – експотенціальне збурення. Ці збурення вводяться у систему (1) та здійснюється моделювання поведінки системи.

6. ВИСНОВКИ

Методи математичного моделювання коливних процесів базуються на диференційних рівняннях і Атеб-функціях. Для чисельного моделювання розроблене відповідне програмне забезпечення.

Результати обчислень подано в табличному і графічному вигляді. Розроблений метод має широке практичне застосування, оскільки періодичні процеси в нелінійних коливних системах виникають у дослідженнях в різних галузях науки та техніки. Отже розроблена математична модель, побудовані методи розрахунків і відповідне програмне забезпечення є потужним інструментом для вивчення коливних процесів у нелінійних системах.

1. Сенік П. М. Обращение неполной Вета – функции. – Укр. мат. журн. 1969, т. 21, № 3, с. 325-333. 2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с. 3. Сокол Б.И. Асимптотические приближения решения для одного нелинейного неавтономного уравнения // Укр. мат. журнал. — 1997. — 49, № 11. — С. 1580-1583. 4. Сокол Б.И. Лицинська Х.І. Застосування асимптотичного методу та Атеб-функцій для побудови розв'язків неоднорідних крайових задач, які описують нелінійні коливання системи, що характеризуються позадвожнім рухом – Вісник Національного університету «Львівська політехніка» Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. — 2008. — № 614.-С.120-124. 5. Грыцьк В.В., Назаркевич М.А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій. – Доповіді НАН України, Сер. А, 2007, № 12. - С. 37 – 43.