УДК 004.722.056:004.724
© М. Костяк[1], В. Отенко,[1] Л. Пархуць,[1] 2012

ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРИ ЗАХИЩЕНОЇ ІНФОРМАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ ПРИ ЇЇ МОДЕРНІЗАЦІЇ

В роботі розглянуто вирішення задачі оптимізації структури захищеної інформаційної мережі при її модернізації чи додаванні нових абонентів з використанням задачі Вебера.

In work consider resolving the problem of optimizing the structure of secure information network for its upgrading or adding new subscribers, based on solving the problem of Weber.

1. ВСТУП

Задача оптимального розміщення комп'ютерів та маршрутизаторів в захищених інформаційних мережах з метою отримання найприйнятнішого трафіку і захисту передачі інформації є актуальною задачею як при створенні нової мережі, так і при оптимізації існуючої. Для оптимальної побудови захищеної інформаційної мережі (ЗІМ), що включає, окрім головного сервера, багато локальних серверів, маршрутизаторів та десятки чи сотні робочих комп'ютерів, зручно застосовувати теорію графів [1–3]. При цьому комп'ютери та маршрутизатори приймають як вершини, а лінії зв'язку між ними – як ребра графа. Переважно основним критерієм оптимальності є сумарна довжина каналів зв'язку і оптимальною структурою – найкоротша з'єднувальна мережа без петель [4–6].

Апарат теорії графів зручно використовувати при вирішенні задачі про оптимальне розміщення нових пунктів комутації та обслуговування в захищених інформаційних мережах, де сума найкоротших відстаней від пункту передачі до пункту отримання інформації (тобто заданих вершин графа) повинна бути мінімальною.

2. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Для вирішення задачі оптимального розташування нових елементів захищеної інформаційної мережі можна застосувати один із варіантів задачі Вебера.

[1]Національний університет "Львівська політехніка"

Розглянемо задачу Вебера в просторі R_1^N. Нехай дано метричний простір R_1^N з метрикою $d(X,Y)=\sum_{r=1}^{N}\left|x^r-y^r\right|$. В ньому задано *n* точок (комп'ютерів) $X_0, X_1, X_2, ..., X_{n-1}$, які передають *m* видів інформації в кількості $q_i(X_i)\geq 0, i=\overline{1,m}; j=\overline{0,n-1}$.

Нам необхідно оптимально додатково розмістити *m* нових точок (комп'ютерів) $Y_1, Y_2, ..., Y_m$. Кожній парі *(i,j)* ставиться у відповідність число $\alpha_{ij}=q_i(X_j)\geq 0, i=\overline{1,m}; j=\overline{0,n-1}$, а кожній *(i,k)*, де *i*<*k*, – число $\beta_{ik}\geq 0, i,k=\overline{1,m}$. Числа α_{ij} і β_{ik} можна інтерпретувати, як величини деяких потоків, що циркулюють між парами точок (Y_i,X_j) і (Y_i,Y_k) відповідно. Потрібно вибрати місця розміщення точок $Y_i, i=\overline{1,m}$, так, щоб функціонал досягав якнайменшого значення.

$$F(Y_1,Y_2,...,Y_m)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{ij}d(Y_i,X_j)+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=i+1}^{m}\beta_{ik}d(Y_i,Y_k)\,. \qquad (1)$$

Зазначимо, що якщо всі $\beta_{ik}=0$, то розв'язання задачі Вебера зводиться до *m* задач про знаходження медіани в просторі R_1^N. Задача Вебера в цьому просторі є задачею мінімізації кусково–лінійної випуклої функції.

Розв'язання задачі Вебера в просторі R_1^N зводиться покоординатно до розв'язання *N* одновимірних задач Вебера. Дійсно,

$$\min F(Y_1,Y_2,...,Y_m)=\min\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{ij}d(Y_iX_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=i+1}^{m}\beta_{ik}d(Y_i,Y_k)\}=\min\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{ij}(\sum_{r=1}^{N}\left|y_i^r-x_j^r\right|)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=i+1}^{m}\beta_{ik}(\sum_{r=1}^{N}\left|y_i^r-y_k^r\right|)\}=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\min\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{ij}\left|y_i^r-x_j^r\right|+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=i+1}^{m}\beta_{ik}\left|y_i^r-y_k^r\right|\}. \qquad (2)$$

Кожна одновимірна задача Вебера може бути сформульована як задача лінійного програмування

$$\min\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}s_{ij}^{r}+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=i+1}^{m}\beta_{ik}t_{ik}^{r}\}$$

при обмеженнях

$$-s_{ij}^{r}\le y_i^r-x_j^r\le s_{ij}^{r},\qquad i=\overline{1,m};\qquad j=\overline{0,n-1};$$

$$-t_{ik}^{r}\le y_i^r-y_k^r\le t_{ik}^{r},\qquad i=\overline{1,m-1};\qquad k=\overline{i+1,m},;$$

де s_{ij}^{r} і t_{ik}^{r} – допоміжні змінні.

Відповідна їй задача запишеться у вигляді

$$\max\sum_{j=0}^{n-1}x_j^r\sum_{i=1}^{m}(u_{ij}^r-u_{ij}^r)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=0}^{n-1}(U_{ij}-u_{ij})-\sum_{k=1}^{i-1}(V_{ki}^r-v_{ki}^r)+\sum_{k=i+1}^{m}(V_{ik}^r-v_{ik}^r)=0, i=\overline{1,m};$$

$$U_{ij}^r+u_{ij}^r=\alpha_{ij},\qquad U_{ij}^r\ge 0; u_{ij}^r\ge 0,\quad i=\overline{1,m}; j=\overline{0,n-1};$$

$$V_{ik}^r+v_{ik}^r=\beta_{ik},\qquad V_{ik}^r\ge 0; v_{ik}^r\ge 0,\quad i=\overline{1,m-1}; k=\overline{i+1,m}.$$

Приведемо алгоритм розв’язання безпосередньо прямої задачі. Без втрати загальності вважатимемо, що для даного r має місце $x_0^r<x_1^r<x_2^r<\ldots<x_p^r<x_{p+1}^r<\ldots<x_{n-1}^r$ (якщо це не так, то упорядкуємо цей ряд і проведемо нову нумерацію, а точки з однаковими x_j^r замінимо однією з потребами, рівними сумі відповідних потреб).

Нехай $(y_1^r, y_2^r,\ldots,y_m^r)$ – довільний допустимий варіант розміщення пунктів обслуговування в одновимірній задачі Вебера.

Позначимо для кожного $r=\overline{1,N}$:

$$I_{1p}^r=\{(i,j): y_i^r\le x_p^r<x_j^r\};\quad I_{2p}^r=\{(i,j): x_j^r\le x_p^r<y_i^r\};$$

$$I_{3p}^r=\{(i,k): y_i^r\le x_p^r<y_k^r\vee y_k^r\le x_p^r<y_i^r\}.$$

Відобразимо ізометрично ланцюг $C(x_o^r,x_{n-1}^r)$ в лінійному просторі R_1^{n-1} таким чином.

Нехай P^{n-1} – паралелепіпед простору R_1^{n-1}, тобто

$$P^{n-1}=\{Z=(z^1,z^2,\ldots,z^p,\ldots,z^{n-1}/0\le z^p\le x_{p+1}^r-x_p^r\}.\qquad(3)$$

Точці x_0^r поставимо у відповідність вершину паралелепіпеда P^{n-1} з координатами *(0, 0..., 0)*, а кожній точці $x_p^r, p \geq 1$ – відповідно

$$Z_p = (z_p^1, z_p^2, ..., z_p^p, ..., z_p^{n-1}), \tag{4}$$

де $z_p^1 = x_1^r - x_0^r$;

$$z_p^2 = x_2^r - x_1^r; ...; \; z_p^p = x_p^r - x_{p-1}^r;$$

$$z_p^{p+1} = z_p^{p+2} = ... = z_p^{n-1} = 0; \quad p = 1,2,...,n-1.$$

З (4) витікає, що різним точкам x_p^r відповідають різні вершини паралелепіпеда P^{n-1}, причому суміжним точкам – суміжні вершини паралелепіпеда P^{n-1}. Кожній вершині $Z_p, p = \overline{0, n-1}$, припишемо потреби, відповідні точці x_p^r. Таким чином, ми звели одновимірну задачу Вебера до аналогічної задачі в лінійному просторі R_1^{n-1}. Але вже відомо, що розв'язання задачі Вебера в просторі R_1^{n-1} зводиться знову покоординатно до розв'язання *n–1* одновимірних задач Вебера. Отже, маємо

$$\min\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{ij}\left|y_i^r - x_j^r\right| + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=i+1}^{m}\beta_{ik}\left|y_i^r - y_k^r\right|\} =$$

$$= \min\{\sum_{p=1}^{n-1}(x_p^r - x_{p-1}^r)(\sum_{(i,j)\in I_{1p}^r}\alpha_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_{2p}^r}\alpha_{ij} + \sum_{(i,k)\in I_{3p}^r}\beta_{ik})\} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n-1}(x_p^r - x_{p-1}^r)\min(\sum_{(i,j)\in I_{1p}^r}\alpha_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_{2p}^r}\alpha_{ij} + \sum_{(i,k)\in I_{3p}^r}\beta_{ik}). \tag{5}$$

Таким чином, оптимальний варіант розміщення в задачі Вебера не залежить від метричних співвідношень між елементами $X_0, X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ простору R_1^N, а залежить тільки від чисел α_{ij} і β_{ik} і від порядку елементів послідовності $x_0^r, x_1^r, ..., x_{n-1}^r$ для кожного $r = 1,2,...,N$.

Для знаходження оптимального варіанту розміщення пунктів обслуговування достатньо в кожній одновимірній задачі Вебера мінімізувати

$$(\sum_{I_{1p}^r}\alpha_{ij}+\sum_{I_{2p}^r}\alpha_{ij}+\sum_{I_{3p}^r}\beta_{ik}) \qquad (6)$$

для кожного $p=\overline{1,n-1}$, а щоб мінімізувати

$$(\sum_{I_{1p}^r}\alpha_{ij}+\sum_{I_{2p}^r}\alpha_{ij}+\sum_{I_{3p}^r}\beta_{ik})$$
$$(\sum_{I_{1p}^r}\alpha_{ij}+\sum_{I_{2p}^r}\alpha_{ij}+\sum_{I_{3p}^r}\beta_{ik})$$

достатньо відносно перетину (x_{p-1}^r, x_p^r) визначити мінімальний розріз деякої мережі. Аналогічно побудуємо мережу $G_{x_{p-1}^r, x_p^r}$ з вершинами $x_{p-1}^r, y_1^r, y_2^r, ..., y_m^r, x_p^r$ (x_{p-1}^r – джерело; x_p^r – витік) і дугами з відповідними пропускними спроможностями:

$$c(x_{p-1}^r, y_i^r)=\sum_{j=0}^{p-1} q_i(x_j^r), 1=1,2,...,m;$$

$$c(y_i^r, x_p^r)=\sum_{j=p}^{n-1} q_i(x_j^r), 1=1,2,...,m.$$

Ребрам повного підграфа з вершинами $y_1^r, y_2^r, ..., y_m^r$ припишемо пропускні спроможності $c(y_k, y_i)=\beta_{ki}, k, i=\overline{1,m}$.

Знайдемо максимальний потік в мережі $G_{x_{p-1}^r, x_p^r}$ і тим самим визначимо мінімальний розріз. Якщо останній утворився виключно на дугах (x_{p-1}^r, y_i^r), то всі пункти $y_1^r, y_2^r, ..., y_m^r$ розмістяться в оптимальному рішенні правіше точки x_{p-1}^r. Аналогічно, якщо мінімальний розріз мережі $G_{x_{p-1}^r, x_p^r}$ утворився виключно на дугах (y_i^r, x_p^r), то всі пункти $y_1^r, y_2^r, ..., y_m^r$ розмістяться лівіше точки x_p^r. І, нарешті, якщо

$$(\{x_{p-1}^r\}\bigcup Y_{x_{p-1}^r}; \{x_p^r\}\bigcup Y_{x_p^r}),$$

і

$$Y_{x_{p-1}^r} \bigcup Y_{x_p^r} = \{ y_1^r, y_2^r, ..., y_m^r \},$$

$y_1^r, y_2^r, ..., y_m^r\}$ є розрізом мінімальної пропускної спроможності в мережі $G_{x_{p-1}^r, x_p^r}$, та множина пунктів $Y_{x_{p-1}^r}$ розміститься лівіше точки x_p^r, а $Y_{x_p^r}$ – правіше x_{p-1}^r.

Оскільки знаходження максимального потоку в мережі $G_{x_{p-1}^r, x_p^r}$ вимагає порядку m^3 операцій, то трудомісткість алгоритму для розв'язання задачі Вебера в просторі R_1^N шляхом перебору всіх перетинів типу (x_{p-1}^r, x_p^r), буде $0(Nnm^3)$.

Викладений алгоритм може бути поліпшений. А саме, використовуючи принцип дихотомії щодо точок $x_0^r, x_1^r, ..., x_{n-1}^r$ і стягуючи кожного разу до знаходження мінімального розрізу нової мережі вершини множини $Y_{x_{p-1}^r}$ або $Y_{x_p^r}$ залежно від того, в яку сторону від середини досліджується задача, одержуємо оцінку $0((mn+m^3 1og_2\, n)N)$.

3. ВИСНОВКИ

Приведені викладки, алгоритм та отримані результати дозволяють виконати оптимізацію структури захищеної інформаційної мережі при її модернізації чи додаванні нових абонентів.

1. Берж К. Теория графов и ее применение. –М.: ИЛ, 1962. –168с. 2. Агеев А.А. Графы, матрицы и простейшая задача размещения / Агеев А.А. // Управляемые системы. – 1989. – Вып. 29. – С. 3–10. 3. Захаров Г.П. Методы исследования сетей передачи данных / Г.П.Захаров. – М: Радио и связь, 1982. –208с. 4. Кудинов В.А., Пархуць Л.Т., Хорошко В.А. Оптимизация структуры информационной сети / В.А.Кудинов, Л.Т.Пархуць, В.А.Хорошко // Захист інформації. –2004, №3. –С.44–49. 5. Кудинов В.А. Методика системного проектирования корпоративных сетей / В.А.Кудинов, Л.Т.Пархуць, В.А.Хорошко // Вісник ДУІКТ. – 2005. – Т. 3, – № 3–4. – С. 184–187. 6. Костяк М.Ю. Алгоритми внутрішньозонової маршрутизації в захищеній локальній мережі / М.Ю.Костяк, Л.Т.Пархуць // Інформаційна безпека. – 2009. – № 1. – С. 38–43.