УДК 62–52
© М. Наконечний[1], 2012

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДВИГУНА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З НЕЗАЛЕЖНИМ ЗБУДЖЕННЯМ ПРИ ДІЇ ЗМІННОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Стаття присвячена побудові і дослідженню математичної моделі двигуна постійного струму з незалежним збудженням. Розглянуто особливості побудови математичної моделі двигуна у випадку дії на двигун моменту в'язкого тертя та позиційного моменту типу повороту руки робота.

This article is devoted to the construction and studying of mathematical models of DC motor with independent excitation. The features of constructing mathematical models of the DC motor in case of DC motor at the moment of friction and positional moment at turning the robot`s hand.

1. ПОСТАВНОВКА ПРОБЛЕМИ

Для успішної побудови ефективного контролера, який повинен забезпечити керування процесом в об'єкті, необхідно зібрати якомога більше інформації щодо самого об'єкта та фізичної природи процесів, які в ньому відбуваються. Отримана інформація допоможе підібрати таку структуру системи, яка максимально відповідає поставленим вимогам, визначити оптимальні режими роботи об'єкта, правильно розрахувати потужність силових елементів, щоб уникнути як значних перевантажень в системі, так не збільшувати при тому її ціну.

Проте не всі фактори можуть бути враховані. Природа одних факторів не завжди відома, інші можуть бути випадковими або мати явно виражені складні нелінійності.

Як відомо, на роботу системи керування електричними двигунами передовсім впливають зміни навантаження. В тих випадках, коли механічні ланки повинні здійснювати складні переміщення за наперед невідомим законом, особливо відчутним та вирішальним стає вплив їх інерційності, яка також може змінюватися при зміні взаємного розташування цих ланок.

Наприклад, при згині суглобів робота змінюються статичні моменти, що виникають внаслідок дії гравітаційних сил, крім того, мають місце динамічні навантаження, які залежать від моментів інерції, що є різними при різних положеннях суглобів. Маса, положення ланки та геометричні розміри навантаження також впливають на роботу системи і, крім того, вони не завжди є строго визначеними.

Значні впливи на роботу системи мають й інші механічні фактори (люфти, що змінюються по мірі спрацювання шестерень, густина мастила і т.д.).

При змінному навантаженні на двигун змінюється і споживана ним потужність, що може спричинити його перегрів і виведення з ладу як самого двигуна так і силових електричних кіл, що забезпечують керування його роботою.

2. ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Схема двигуна постійного струму з незалежним збудженням наведена на рис. 1.

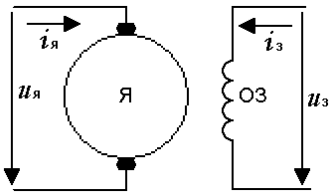

Рис. 1. Схема двигуна постійного струму з незалежним збудженням

Для одержання математичної моделі двигуна вважаємо криву намагнічування лінійною, тоді рівняння для обмотки збудження має вигляд:

$$L_З \frac{di_З}{dt} + r_З i_З = U_З, \qquad (1)$$

де $U_З$ – напруга, що подається на обмотку збудження;

$i_З$ – струм обмотки збудження;

$L_З$ – індуктивність обмотки збудження;

$r_З$ – опір обмотки збудження.

Рівняння для кола якоря запишемо у вигляді:

$$L_Я \frac{di_Я}{dt} + r_Я i_Я + e_Я = U_Я, \qquad (2)$$

де $u_Я$ – напруга, що подається на якір;

$i_Я$ – струм якоря;

$L_Я$ – індуктивність обмотки якоря;

$r_Я$ – опір кола якоря;

$e_Я$ – протидіюча електрорушійна сила, що виникає при обертанні якоря:

$$e_Я = k_e \omega \Phi_З, \qquad (3)$$

де k_e – конструктивна стала;

ω – частота обертання ротора;

$\Phi_З$ – магнітний потік обмотки збудження.

Вираз для визначення магнітного потоку обмотки збудження має вигляд:

$$\Phi_З = k_\Phi i_З, \tag{4}$$

де k_Φ – конструктивна стала кола збудження.

Крутний момент, що виникає на валу двигуна, обчислюється за формулою:

$$M = k_M i_Я \Phi_З, \tag{5}$$

де k_M – конструктивна стала двигуна.

Закономірності обертання вала двигуна в динаміці визначаються рівнянням:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - M_Н. \tag{6}$$

Для подальшого спрощення рівнянь динаміки двигуна розглянемо детальніше, як в стаціонарному режимі передається енергія від джерела електричної енергії до навантаження. Враховуючи те, що в стаціонарному режимі похідні в рівняннях динаміки дорівнюють нулю, можна вважати, що проходження струму через обмотку збудження приводить тільки до її нагрівання. Тоді домноживши ліву і праву частини рівняння (2) на $i_Я$ і врахувавши, що $\frac{di_Я}{dt} = 0$, одержимо:

$$r_Я i_Я^2 + e_Я i_Я = u_Я i_Я, \tag{7}$$

де $u_Я i_Я$ – потужність джерела обмотки якоря;

$r_Я i_Я^2$ – частина потужності джерела, що витрачається на нагрівання обмотки якоря;

$e_Я i_Я$ – потужність, що йде на подолання проти е.р.с. і перетворюється в механічну потужність, забезпечуючи при цьому створення крутного моменту.

Тому можна записати :

$$P_{MEX} = e_Я i_Я. \tag{8}$$

З рівняння (6) при $\frac{d\omega}{dt} = 0$ випливає, що $M = M_Н$ (вважаємо, що механічне тертя в двигуні включено в величину момента навантаження). Тоді домноживши ліву і праву частини виразу $M = M_Н$ на ω, одержимо $\omega M = \omega M_Н$ і згідно з виразом

$$P = \frac{dA}{dt} = M\frac{d\phi}{dt} = M\omega \qquad (9)$$

запишемо $P_{MEX} = M\omega$. Підставивши P_{MEX} в рівняння (8), отримаємо $M\omega = e_Я i_Я$, а з врахуванням (3) і (5) будемо мати:

$$k_M \omega i_Я \Phi_З = k_e \omega \Phi_З i_Я , \qquad (10)$$

звідки випливає, що: $k_M = k_e$.

Після підстановки виразів (3), (4), (5) в рівняння (2) і (6) одержимо:

$$L_Я \frac{di_Я}{dt} + r_Я i_Я + k_e \omega k_Ф i_З = u_Я , \qquad (11)$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = k_M i_Я k_Ф i_З - M_H . \qquad (12)$$

З рівняння (10) випливає, що $k_e k_Ф = k_M k_Ф$, тому враховуючи, що $k_e k_Ф$ *і* $k_M k_Ф$ мають розмірності індуктивностей і ввівши позначення $L_{ЗЯ} = k_e k_Ф$, перепишемо рівняння (2) і (6) у вигляді:

$$L_Я \frac{di_Я}{dt} + r_Я i_Я + L_{ЗЯ} i_З \omega = u_Я , \qquad (13)$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = L_{ЗЯ} i_З i_Я - M_H . \qquad (14)$$

Тоді, з врахуванням рівняння (1) одержимо систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} L_З \frac{di_З}{dt} + r_З i_З &= u_З \\ L_Я \frac{di_Я}{dt} + r_Я i_Я + L_{ЗЯ} i_З \omega &= u_Я \\ J\frac{d\omega}{dt} &= L_{ЗЯ} i_З i_Я - M_H \end{aligned}\right\} . \qquad (15)$$

Перейшовши до подання в операторній формі і перегрупувавши доданки, отримаємо систему рівнянь, яку можна використати для побудови моделі двигуна:

$$\left.\begin{aligned}(sT_З+1)i_З &= \frac{u_З}{r_З}\\ (sT_Я+1)i_Я &= \frac{u_Я - L_{ЗЯ}i_З\omega}{r_Я}\\ s\omega &= \frac{L_{ЗЯ}i_З i_Я - M_H}{J}\end{aligned}\right\}, \qquad (16)$$

де $T_З$ – стала часу кола збудження;

$T_Я$ – стала часу кола якоря.

Схема моделювання двигуна постійного струму з незалежним збудженням, реалізована в системі Simulink [1], наведена на рис. 2.

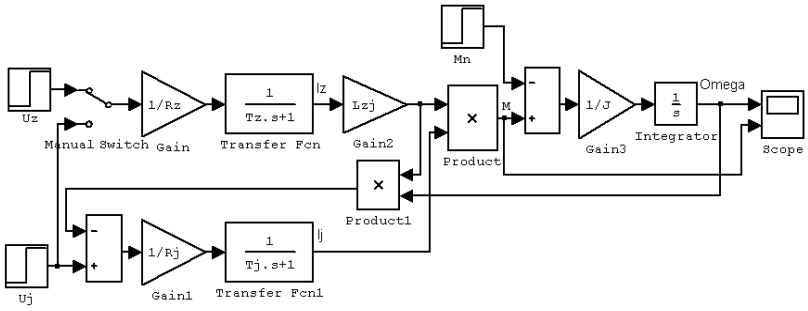

Рис. 2. Схема моделювання двигуна постійного струму з незалежним збудженням

Перед початком моделювання задаємось значеннями параметрів: **Lzj=1.8, Rz=1,Rj=1, Tz=0.5, Tj=0.02, J=1**. Результати моделювання двигуна з незалежним збудженням наведені на рис. 3.

На рисунку 3 наведені часові діаграми сигналів на входах керування ($u_З$, $u_Я$ – на рисунку **Uz**, **Uj,** відповідно), і на вході збурення (M_H – на рисунку **Mn**), та діаграми вихідних величин – частоти обертання ротора (ω – на рисунку **Omega**) і крутного моменту двигуна (M). Додатково наведені часові діаграми струмів в керуючих колах (струмам $i_З$, $i_Я$ – на рисунку відповідають струми i_z, i_j).

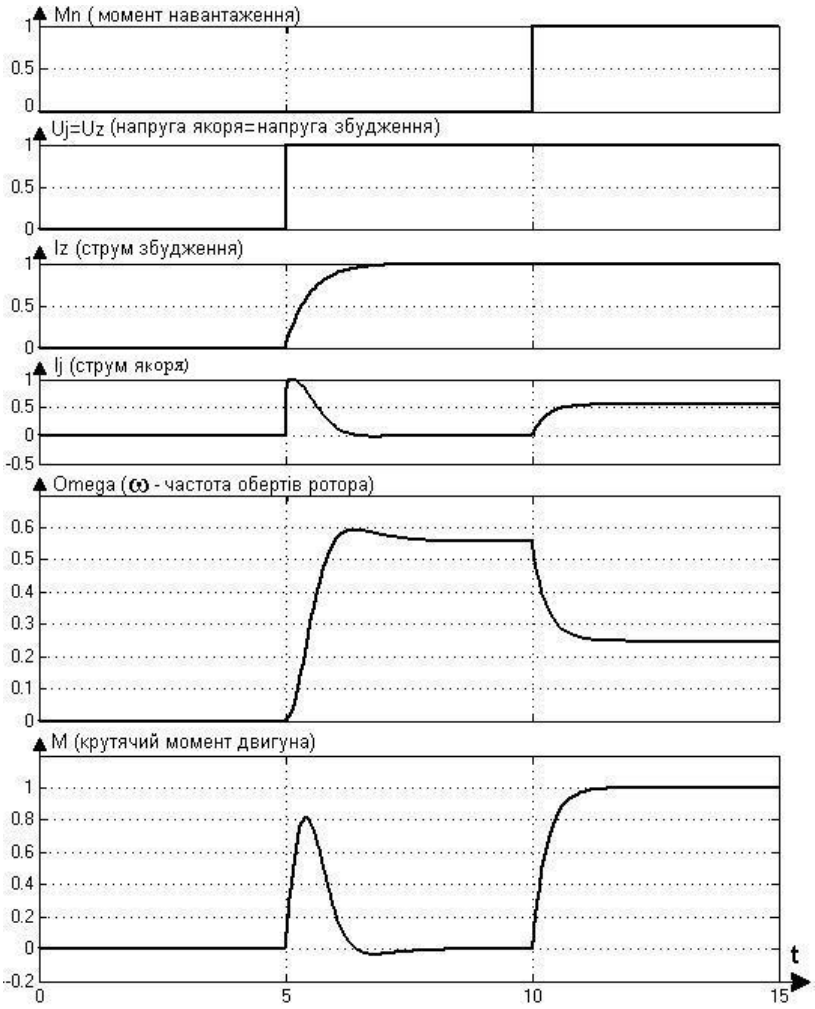

Рис. 3. Результати моделювання двигуна постійного струму з незалежним збудженням

З отриманих в процесі моделювання результатів випливає, що математична модель двигуна адекватно відтворює процеси, які протікають в реальному об'єкті.

Розміщення діаграм суміщено одна над одною, що дозволяє побачити як подача вхідних сигналів відображається на вихідних.

При моделюванні двигуна постійного струму з незалежним збудженням напруга якоря подається з запізненням (в момент часу 5с) для

того, щоб перехідний процес в колі збудження встиг завершитися. В точці t=10с подається момент навантаження, що дає можливість оцінити перехідний процес, спричинений збуренням.

Розглянемо двигун з незалежним збудженням, що навантажений моментом в'язкого тертя та позиційним моментом типу повороту руки робота. В цьому випадку сумарний момент опору навантаження можна подати у вигляді:

$$M_{PM} = \mathrm{k}_{\mathrm{BT}рм}\ \omega_{PM} + mga\sin\phi_{PM} = \mathrm{k}_{\mathrm{BT}рм}\ \frac{\omega}{i} + mga\sin\frac{\phi}{i}, \quad (17)$$

де ω_{PM} – частота обертання робочого механізму;

φ_{PM} – кут повороту робочого механізму;

i – коефіцієнт передачі редуктора;

ω – частота обертання вала двигуна;

φ – кут повороту вала двигуна;

$\mathrm{k}_{\mathrm{BT}рм}$ –коефіцієнт в'язкого тертя.

Якщо відомі власний момент опору двигуна M', момент опору робочого механізму M_{PM}, момент опору редуктора M_P (вважаємо, що він зосереджений на ведучій стороні передачі) та коефіцієнт корисної дії редуктора η_P, то для загального моменту опору навантаження, зведеного до валу двигуна, одержимо:

$$M_H = M' + \frac{M_P + M_{PM}}{i\eta_p}\ . \quad (18)$$

Тоді, відповідно до (18) можна записати

$$M_H = M' + \frac{M_P + \mathrm{k}_{\mathrm{BT}рм}\frac{\omega}{i} + mga\sin\frac{\varphi}{i}}{i\eta_p}\ . \quad (19)$$

Вважємо, що власний момент опору двигуна, як і момент опору редуктора, в основному можуть бути представлені моментом в'язкого тертя двигуна ($M' = \mathrm{k}'_{\mathrm{BT}}\ \omega$) і моментом в'язкого тертя редуктора ($M_P = \mathrm{k}_{\mathrm{BT}ред}\frac{\omega}{i}$). Здійснивши підстановку, і згрупувавши члени в правій частині (19) одержимо:

$$M_H = k_1\omega + k_2 \sin\frac{\varphi}{i}, \qquad (20)$$

де $k_1 = \mathrm{k'}_{\mathrm{ВТ}} + \dfrac{\mathrm{k}_{\mathrm{ВТ}ред} + \mathrm{k}_{\mathrm{ВТ}рм}}{i^2\eta_p}$, $k_2 = \dfrac{mga}{i\eta_p}$ – коефіцієнти.

В подальшому, для спрощення (не змінюючи самої суті рівняння (20)), будемо вважати, що передавальне число i=1, тоді рівняння (20) перепишемо у вигляді

$$M_H = k_1\omega + k_2 \sin\varphi. \qquad (21)$$

Підставивши вираз (21) в (15) одержимо:

$$\left.\begin{aligned} L_З\frac{di_З}{dt} + r_З i_З &= u_З \\ L_Я\frac{di_Я}{dt} + r_Я i_Я + L_{ЗЯ} i_З\omega &= u_я \\ J\frac{d\omega}{dt} &= L_{ЗЯ} i_З i_Я - k_1\omega - k_2\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Так як для двигуна постійного струму з незалежним збудженням можна вважати, що $\dfrac{di_З}{dt} = 0$ і $i_З = \dfrac{u_З}{r_З}$, то (22) можна подати у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} L_Я\frac{di_Я}{dt} + r_Я i_Я + L_{ЗЯ}\frac{u_З}{r_З}\omega &= u_Я \\ J\frac{d\omega}{dt} &= L_{ЗЯ}\frac{u_З}{r_З} i_Я - k_1\omega - k_2\sin\phi \end{aligned}\right\}. \qquad (23)$$

Враховуючи, що $\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} u_Я &= L_Я\frac{di_Я}{dt} + r_Я i_Я + L_{ЗЯ}\frac{u_З}{r_З}\frac{d\varphi}{dt} \\ J\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= L_{ЗЯ}\frac{u_З}{r_З} i_Я - k_1\frac{d\varphi}{dt} - k_2\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (24)$$

Якщо у першому рівнянні системи (24) $L_Я$ прирівняти до нуля (що близько до дійсності), то після проведення певних перетворень друге рівняння системи (24) можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a\frac{d\varphi}{dt} + b\sin\varphi = cu_Я\,, \qquad (25)$$

де $a = \left(k_1 + \left(L_{ЗЯ}\frac{u_З}{r_З}\right)^2 : r_Я\right) : J$; $b = \frac{k_2}{J}$; $c = L_{ЗЯ}\frac{u_З}{r_З r_Я J}$. (26)

3. ВИСНОВКИ

Отже, результуюче рівняння двигуна постійного струму з незалежним збудженням з врахуванням моменту в'язкого тертя і моменту типу повороту руки робота є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Лінеаризація отриманого рівняння приводить до його значного спрощення, однак при цьому не враховується нелінійність характеристик двигуна, як одна із особливостей, що найбільш суттєво впливає на поведінку двигуна, як в перехідному, так і в стаціонарному режимах роботи. Якщо при побудові математичної моделі двигуна враховувати вплив індуктивності якоря $L_Я$, то робота двигуна буде описуватися диференціальним рівнянням вищого порядку та із значно складнішою нелінійною залежністю, що приводить до суттєвого обмеження можливостей використання такої моделі при вирішенні задач, пов'язаних з аналізом і синтезом систем автоматичного керування.

1. Герман–Галкин С.Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0. – СПб.: Корона принт, 2001. – 320 с. 2. Волков Н.И., Миловзоров В.П. Электромашинные устройства автоматики. – М.: Высшая школа., 1986. – 335 с.