УДК 519.685
© Й. Лучко[1], Р. Пелех[2], Я. Пелех[3], 2012

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА ДРУГОГО РОДУ

Запропоновано нові числові методи типу Рунге-Кутта, а також двосторонні розрахункові формули першого та другого порядку точності для знаходження наближеного розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра другого роду. Ці формули дозволяють в кожній вузловій точці отримувати не тільки верхні та нижні наближення до точного розв'язку, але й давати інформацію про величину головного члена похибки без додаткових звертань до правої частини інтегрального рівняння.

The new numerical methods of Runge-Kutta type and two-side formulas of the first and second order of accuracy for solving of the Volterra integral equation of the second kind are constructed. The formulas give an opportunity to receive upper and lower approximation at each point to the exact solution and define the value of the main error without referring to the right part of Volterra integral eguation.

Задачі електротехніки, автоматичного управління, будівельної механіки, багатовимірної оптимізації приводять до необхідності розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра

$$f(x)=\int_a^x F[x,y,f(x)]dy\,, \quad x\in I_L\,, \tag{1}$$

де функція $F[x,y,f(y)]$ має необхідну гладкість. Ідея застосування методів Рунге-Кутта до чисельного розв'язування рівняння (1) була висловлена В. І. Криловим [1], а вперше застосована Aparo [2]. У працях [3, 4] були побудовані формули методу Рунге-Кутта третього порядку точності. Тут наближений розв'язок рівняння в кожній вузловій точці обчислювався тільки з допомогою формул методів Рунге-Кутта. В роботі [5] запропоновано більш простий в реалізації алгоритм, в якому на кожному кроці інтегрування застосовуються як формули виду Рунге-Кутта, так і квадратурних сум відповідних порядків. Побудова методів високих порядків розглядається в [6, 7].

У зв'язку з відсутністю ефективного способу оцінки похибки наближеного розв'язку виникла необхідність розробки двосторонніх ме-

[1] Львівський державний аграрний університет
[2] ДП ПКТБ АСУ залізничного транспорту України
[3] Національний університет «Львівська політехніка»

тодів. У праці [8] запропоновані формули p-го $(p=1,2)$ порядку, а в [6] – використовуючи модифіковане перетворення Фельберга, побудовані двосторонні формули $(m+p)$-го порядку точності $(m=0,1,2,...;p=1,2,3)$. Більш детально числові методи розв'язування інтегральних рівнянь описані в роботах [9, 10].

Останнім часом в обчислювальній математиці знаходять застосування ланцюгові (неперервні) дроби, у зв'язку з їх важливим теоретичним і прикладним значенням. За певних умов, використання апарату ланцюгових дробів дає високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні й монотонні наближення, сприяє обмеженому накопиченню похибок заокруглення і зменшенню кількості операцій при розрахунках на ЕОМ. Значне підвищення інтересу до ланцюгових дробів пов'язане ще з тим, що процес їх обчислень є циклічним і легко піддається програмуванню на ЕОМ.

У даній роботі досліджено можливість застосування неперервних дробів [11, 12] для побудови нових числових методів розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Розділимо інтервал $I_L:[a,b]$ на N частин довжини $h=(b-a)/N$ і позначимо $x_{i+1}=a+ih$ $(i=0,1,2,3,...)$, $f_i=f(x_i)$, причому $f(x_1)=0$. Розвинення шуканого розв'язку $f(x)$ в околі точки $x=a$ в ряд Тейлора за степенями h має вигляд:

$$f_2=hf_1'+\frac{1}{2}h^2f_1''+\frac{1}{6}h^3f_1'''+\frac{1}{24}h^4f_1^{IV}+\ldots, \tag{2}$$

де

$$f_1'=F[x,y,f(y)]\equiv F, \qquad f_1''=2F_x+F_y+FF_z,$$

$$f_1'''=3F_{xx}+3F_{xy}+F_{yy}+3F_{xz}+2FF_{yz}+F^2F_{zz}+2F_xF_z+F_yF_z+F(F_z)^2,$$

і т.д. Тут функція $F[x,y,f(y)]$ і всі її похідні взяті в точці $(a,a,0)$.

Використовуючи апарат ланцюгових дробів [11, 12] та ідею побудови методів Рунге-Кутта, наближений розв'язок рівняння (1) в точці $x_2=x_1+h$ шукаємо у вигляді:

$$Y_2^{[k,l]}=\cfrac{c_{0,0}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1}d_{i,0}+\cfrac{d_{k,0}}{1+\ddots+\cfrac{d_{k,l-1}}{1+d_{k,l}}}} \tag{3}$$

Вирази $c_{0,0}$, $d_{i,j}$ для $k+l=2$ $(k=1,2;\ l=0,1)$ мають вигляд:

$$c_{0,0}=h\delta_1,\ d_{0,0}=1,\ d_{1,0}=\frac{\delta_2}{\delta_1},\ (\delta_1\neq 0),\ d_{2,0}=\frac{\delta_1\delta_3+\delta_2^2}{\delta_1^2},\ d_{1,1}=\frac{d_{2,0}}{d_{1,0}},$$

$$\delta_i=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}k_j,\ k_j=F\left[a+\alpha_j h, a+\beta_j h, h\sum_{m=0}^{j-1}\gamma_{jm}k_m\right], \gamma_{j0}=0.$$

_Розглянемо спочатку формули (3) при $k=1, l=0$, тобто

$$Y_2^{[1,0]}=\frac{h\delta_1^2}{\delta_1+\delta_2},$$

$$\delta_i=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}k_j,\ (i=1,2)\ \ k_j=F\left[a+\alpha_j h, a+\beta_j h, h\sum_{m=0}^{j-1}\gamma_{jm}k_m\right],\ \gamma_{j0}=0.$$

Тоді, наприклад, якщо

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=1,\quad \beta_1=0,\quad \beta_2=\frac{1}{2},\ \gamma_{21}=\frac{1}{2},$$

$$a_{11}=1-a_{12},\quad a_{21}=1-a_{12},\quad a_{22}=a_{12}-1, \tag{4}$$

де a_{12} - довільне число, то $f_2-Y_2^{[1,0]}=O\left(h^3\right)$.

Аналогічно, якщо

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=1,\quad \beta_1=0,\ \beta_2=\frac{1}{2},\ \gamma_{21}=\frac{1}{2},$$

$$a_{11}=1-a_{12},\ a_{21}=1-a_{12}-\omega,\ a_{22}=a_{12}-1+\omega, \tag{5}$$

то

$$f_2-Y_2^{[1,0]}=\omega h^2 f_1^{II}+O\left(h^3\right)\cong\omega h\left(k_2-k_1\right)+O\left(h^3\right).$$

Отже, використовуючи тільки два звертання до правої частини інтегрального рівняння (1), можна отримати наближення до розв'язку другого порядку точності, а також двосторонні наближення першого порядку точності та оцінити головний член локальної похибки.

Розглянемо тепер формулу (3) при $k=2, l=0$:

$$Y_2^{[2,0]}=\frac{c_{0,0}}{1+d_{1,0}+d_{2,0}}, \tag{6}$$

де

$$c_{0,0}=h\delta_1,\ d_{1,0}=\frac{\delta_2}{\delta_1},\ d_{2,0}=\frac{\delta_1\delta_3+\delta_2^2}{\delta_1^2},$$

$$\delta_i=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}k_j,\ i=\overline{1,p},\ p=3,\ \delta_1\neq 0,$$

$$k_j = F\left[a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h\sum_{m=0}^{j-1}\gamma_{jm}k_m\right],\ \gamma_{j0} = 0\,.$$

Представимо $Y_2^{[2,0]}$ у вигляді

$$Y_2^{[2,0]} = \frac{h\delta_1^3}{\delta_1^2 + \delta_1(\delta_2 + \delta_3) + \delta_2^2} = \frac{P_{[2,0]}}{Q_{[2,0]}}\,. \qquad (7)$$

Розвинувши вирази для δ_i $(i = 1,2,3)$ в ряди Тейлора за степенями h, отримаємо для $P_2^{[2,0]}$ і $Q_2^{[2,0]}$ наступні розклади:

$$P_{[2,0]} = h\delta_1^3 = h\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\right)^3 F^3 + 3h^2\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\right)^2\left\{\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\alpha_j\right)F_x + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\beta_j\right)F_y + \left(\sum_{j=2}^{3}a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)FF_z\right\} +$$

$$+ h^3\left\{3\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\right)^2\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\alpha_j^2\right)F_{xx} + \left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\alpha_j\beta_j\right)F_{xy} + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\beta_j^2\right)F_{yy} + \right.\right.$$

$$+ \left(\sum_{j=2}^{3}a_{1j}\alpha_j\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)FF_{xz} + \left(\sum_{j=2}^{3}a_{1j}\beta_j\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)FF_{yz} + \left(\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{3}a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}^2\right)F^2F_{zz} +$$

$$\left. + \left(\sum_{j=2}^{3}a_{ij}\sum_{m=1}^{j-1}\alpha_m\gamma_{jm}\right)F_xF_z + \left(\sum_{j=2}^{3}a_{ij}\sum_{m=1}^{j-1}\beta_m\gamma_{jm}\right)F_yF_z + a_{i3}\gamma_{32}\gamma_{21}F(F_z)^2\right] +$$

$$\left. + 3\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\right)^2\left[\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\alpha_j\right)F_x + \left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\beta_j\right)F_y + \left(\sum_{j=2}^{3}a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)FF_z\right]^2\right\} + O(h^4)$$

.

$$Q_{[2,0]} = \delta_1^2 + \delta_1(\delta_2 + \delta_3) + \delta_2^2 = \left\{\left[F_1^{(0)}\right]^2 + F_1^{(0)}\left[F_2^{(0)} + F_3^{(0)}\right] + \left[F_2^{(0)}\right]^2\right\} +$$

$$+ h\left\{2F_1^{(0)}F_1^{(1)} + F_1^{(0)}\left[F_2^{(1)} + F_3^{(1)}\right] + F_1^{(1)}\left[F_2^{(0)} + F_3^{(0)}\right] + 2F_2^{(0)}F_2^{(1)}\right\} +$$

$$+ h^2\left\{2F_1^{(0)}F_1^{(2)} + F_1^{(0)}\left[F_2^{(2)} + F_3^{(2)}\right] + F_1^{(2)}\left[F_2^{(0)} + F_3^{(0)}\right] + 2F_2^{(0)}F_2^{(2)} + \right.$$

$$\left. + \left[F_1^{(1)}\right]^2 + F_1^{(1)}\left[F_2^{(1)} + F_3^{(1)}\right] + \left[F_2^{(1)}\right]^2\right\} + O(h^3), \qquad (8)$$

де

$$F_i^{(0)} = \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) F\ , \quad F_i^{(1)} = \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\alpha_j\right) F_x + \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\beta_j\right) F_y + \left(\sum_{j=2}^{3} a_{ij} \sum_{m=1}^{j-1} \gamma_{jm}\right) F F_z\,,$$

$$F_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\alpha_j^2\right) F_{xx} + \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\alpha_j\beta_j\right) F_{xy} + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\beta_j^2\right) F_{yy} +$$

$$+\left(\sum_{j=2}^{3} a_{ij}\alpha_j \sum_{m=1}^{j-1} \gamma_{jm}\right) F F_{xz} + \left(\sum_{j=2}^{3} a_{ij}\beta_j \sum_{m=1}^{j-1} \gamma_{jm}\right) F F_{yz} + \left(\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{3} a_{ij} \sum_{m=1}^{j-1} \gamma_{jm}^2\right) F^2 F_{zz} +$$

$$+\left(\sum_{j=2}^{3} a_{ij} \sum_{m=1}^{j-1} \alpha_m \gamma_{jm}\right) F_x F_z + \left(\sum_{j=2}^{3} a_{ij} \sum_{m=1}^{j-1} \beta_m \gamma_{jm}\right) F_y F_z + a_{i3}\gamma_{32}\gamma_{21} F \left(F_z\right)^2 .$$

Враховуючи розвинення (2), знайдемо різницю $f_2 Q_{[2,0]} - P_{[2,0]}$.

Прирівнявши до нуля відповідні коефіцієнти при h^2 і h^3 отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j} = 1, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{2j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{3j} = 0,$$

$$1 - \sum_{j=1}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\alpha_j = 0, \quad \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\beta_j = 0,$$

$$\frac{1}{2} - \sum_{j=2}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm} = 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\alpha_j^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\alpha_j\beta_j = 0, \quad \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\beta_j^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} - \sum_{j=2}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\alpha_j\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm} = 0, \quad \frac{1}{3} - \sum_{j=2}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\beta_j\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm} = 0,$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}^2 = 0, \quad \frac{1}{3} - \sum_{j=2}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\sum_{m=1}^{j-1}\alpha_m\gamma_{jm} = 0,$$

$$\frac{1}{6} - \sum_{j=2}^{3}\left(a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}\right)\sum_{m=1}^{j-1}\beta_m\gamma_{jm} = 0, \quad \frac{1}{6} - \left(a_{13} - a_{23} - a_{33}\right)\gamma_{21}\gamma_{32} = 0,$$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\alpha_j\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\alpha_j\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\alpha_j - 1 = 0,$$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\beta_j\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\beta_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\beta_j - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\left(\sum_{j=2}^{3} a_{2j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)^2-\left(\sum_{j=2}^{3} a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)^2+\left(\sum_{j=2}^{3} a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)-\frac{1}{4}=0,$$

$$2\left(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\alpha_j\right)\left(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\beta_j\right)-2\left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\alpha_j\right)\left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\beta_j\right)+2\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\beta_j+\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\alpha_j-1=0,$$

$$2\left(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\alpha_j\right)\left(\sum_{j=2}^{3} a_{2j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)-2\left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\alpha_j\right)\left(\sum_{j=2}^{3} a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)+$$

$$+2\sum_{j=2}^{3} a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}+\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\alpha_j-1=0,$$

$$2\left(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\beta_j\right)\left(\sum_{j=2}^{3} a_{2j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)-2\left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\beta_j\right)\left(\sum_{j=2}^{3} a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}\right)+$$

$$2\sum_{j=2}^{3} a_{1j}\sum_{m=1}^{j-1}\gamma_{jm}+\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\beta_j-\frac{1}{2}=0. \qquad (9)$$

В якості прикладу випишемо два конкретні набори параметрів, при яких $f_2-Y_2^{[2,0]}=O\left(h^4\right)$:

$$\alpha_1=\alpha_3=1,\ \alpha_2=0,\ \beta_1=0,\ \beta_2=1,\ \beta_3=\frac{2}{3},\gamma_{21}=1,\gamma_{31}=\frac{4}{9},\quad \gamma_{32}=\frac{2}{9},$$

$$a_{11}=1,\ a_{12}=0,\ a_{13}=0,\ a_{21}=\frac{3}{4},\ a_{22}=0,\ a_{23}=-\frac{3}{4},\ a_{3i}=0,\ i=1,2,3.$$

(10)

$$\alpha_1=\frac{1}{3},\ \alpha_2=\alpha_3=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=\frac{2}{3},\ \beta_3=0,\ \gamma_{21}=\frac{2}{3},$$

$$\gamma_{31}=-1,\ \gamma_{32}=1,\ a_{11}=a_{12}=0,\ a_{13}=1,\ a_{21}=0,\ a_{22}=-\frac{3}{4},\ a_{23}=\frac{3}{4},$$

$$.\qquad a_{3i}=0,\ i=1,2,3, \qquad (11)$$

Для отримання двосторонніх формул з оцінкою головного члена похибки, покладемо в системі (9)

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j}=1,\sum_{j=1}^{3} a_{2j}=0,\sum_{j=1}^{3} a_{3j}=0,\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\alpha_j=\omega,\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\alpha_j=-1-\omega,$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{3j}\alpha_j=2\omega,\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\beta_j=\frac{\omega}{2},\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\beta_j=-\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2},\sum_{j=1}^{3} a_{3j}\beta_j=\omega.$$

У цьому випадку

$$f_2-Y_2^{[2,0]}=\omega h^3 G^{[2,0]}(F)+O\left(h^4\right)=\omega h^3\frac{(2F_x+F_y+FF_z)^2}{F}+O\left(h^4\right),$$

Випишемо один конкретний набір параметрів:

$$a_{11}=\frac{3}{2}(1-\omega),a_{12}=\frac{3}{4}\omega,a_{13}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\omega,a_{21}=\frac{3}{2}(1+\omega),$$

$$a_{22} = -\frac{3}{4}(1+\omega), a_{22} = -\frac{3}{4}(1+\omega), a_{31} = -3\omega, a_{32} = \frac{3}{2}\omega, a_{33} = \frac{3}{2}\omega.$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3},\ \beta_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = \frac{2}{3},\ \gamma_{21} = \frac{2}{3},\ \alpha_3 = 1,\ \beta_3 = 0,$$

$$\gamma_{31} = -1,\ \gamma_{32} = 1. \qquad (12)$$

При цих значеннях параметрів головний член локальної похибки можна оцінити без додаткових звертань до правої частини інтегрального рівняння (1):

$$G^{[2,0]}(F) \cong \frac{h\left(\sum_{j=1}^{3} a_{3j} k_j\right)^2}{\omega^2 k_1}.$$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі (1) в наступних вузлових точках застосуємо метод рухомого початку. Для цього представимо (1) у вигляді

$$f(x) = \Phi_{n-1}(x) + \Psi_n(x),\ x \in [x_{n-1}, x_n],\ (n \geq 3), \qquad (13)$$

$$\Phi_{n-1}(x) = \int_{x_1}^{x_{n-1}} F[x, y, f(y)]dy, \qquad (14)$$

$$\Psi_n(x) = \int_{x_{n-1}}^{x} F[x, y, f(y)]dy. \qquad (15)$$

Підставляючи в (15) вираз для f з (13) отримаємо інтегральне рівняння з новим початком

$$\Psi_n(x) = \int_{x_{n-1}}^{x} F^*[x, y, \psi_n(y)]dy, \qquad (16)$$

де

$$F^*[x, y, v] = F[x, y, \Phi_{n-1}(y) + v].$$

Нехай відомі наближення $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ $(n \geq 3)$. Для отримання $Y_n (Y_n \cong f(x_{n-1} + h))$ потрібно мати наближення для $\Phi_{n-1}(x)$ і $\Psi_n(x)$ при $x = x_{n-1} + h$. Наближення до $\Phi_{n-1}(x)$ можна знайти двома способами:

а) представити $\Phi_{n-1}(x)$ у вигляді

$$\Phi_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-2} \mu_k(x),\ \mu_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} F[x, y, f(y)]dy$$

і μ_k $\left(k=\overline{1,n-1}\right)$ шукати з застосуванням формул (9).

b) використати квадратурні формули, тобто

$$\Phi_{n-1}(x)=\sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1,j} F\left[x, x_j, Y_j\right].$$

Для знаходження наближення до (16) застосуємо формули виду (6) з новим початком інтегрування.

ВИСНОВОК

Запропоновано числові методи першого, другого та третього порядку точності для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. На відміну від традиційних методів Рунге-Кутта виведено двосторонні розрахункові формули, які дають можливість на кожному кроці отримувати оцінку головного члена похибки без додаткових обчислень правої частини інтегрального рівняння.

1. Крылов В.И. Приложение формулы Эйлера-Лапласа к приближенному решению интегральных уравнений типа Вольтерра // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1949. – Т. 28. – С. 33-72. 2. Aparo E. Sulla risoluzione numerica delle equaziono integrali di Volterra di seconda specie // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. – 1959. – T. 26. – S. 183-188. 3. Бельтюков Б. А. Аналог метода Рунге-Кутта для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 4. – С. 545-556. 4. Ломакович А.Н., Василенко А. Н. Решение интегральных уравнений Вольтера методом вида Рунге-Кутта // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, №11. – С. 2094-2103. 5. Pouzet P. Etude en ven dc leur traitement numerique des equations integrales de type Volterra // Revue Francaise de traitement de 1'information. – 1963 – V. 6, N 2. – P. 79-112. 6. Ломакович А. Н., Щук В. А. О приближенном решении одного нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра двусторонним методом вида Рунге-Кутта-Фельберга // Вычислительная и прикладная математика. – Киев: Наук. думка. – 1974. – Вып.23.– С. 29-40. 7. Coroian I. Asupre metodei Runge-Kutta-Fehlberg, pentru ecuatia integrala neliniara de tip Volterra / Coroian I. // Stud. Cerc. Math. – 1974. – V. 26, N4. – P. 505-511. 8. Ищук В. А. Двусторонние методы вида Рунге-Кутта для нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Докл. АН УССР. Сер А. – 1975. – №1. – С. 14-17. 9. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы – К.: Наук.думка, 1986. – 544 с. 10. Baker C. T. H. The numerical treatment of integral equations – Oxford: Calarendon Press, 1977. – 1033 p. 11. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения – М.: Мир, 1985. – 414 с. 12. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике – М.: Наука, 1983. – 312 с.