УДК 517.95+534
© П. Пукач[1], З. Нитребич[1], П. Сохан[28], 2013

НЕЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ НЕОБМЕЖЕНОЇ БАЛКИ З УРАХУВАННЯМ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ

Робота присвячена якісному дослідженню розв'язку задачі про коливання в'язкопружної довгомірної балки під дією дисипативних сил та нелінійних сил опору в необмеженій області. Методика якісного вивчення базується на загальних принципах теорії нелінійних крайових задач - методі монотонності та методі Гальоркіна.

The paper is devoted to qualitative investigation of solution for the problem of oscillations of viscoelastic elongated beam under nonlinear dissipative forces and resistance forces in unbounded domain. Methodology of qualitative research is based on the general principles of the theory of nonlinear boundary value problems - method of monotony and Galerkin method.

1. ВСТУП

Проблема вивчення динамічних явищ у нелінійних коливальних системах при дії різного роду сил є достатньо дослідженою у випадку систем, які моделюються лінійними диференціальними рівняннями. Лише на основі розв'язків диференціальних рівнянь, адекватних до коливального процесу, можна вивчати вплив параметрів систем на динамічні явища, прогнозувати резонанси на стадії проектування тощо. Теорія нелінійних коливань на даний час грунтовно розроблена лише для квазілінійних систем [1, 2]. Однак розвиток техніки вимагає постановки і розв'язання задач, математичні моделі яких не завжди можна дослідити асимптотичними методами нелінійної механіки: задачі про коливанння гнучких елементів пасових або ланцюгових передач, стрічкових систем для запису та відтворення інформації, устаткування для буріння нафтових і газових свердловин тощо. При вивченні таких систем доводиться вдаватися до різних наближених аналітичних підходів та наближених методів. У зв'язку з цим видається актуальною проблема якісного дослідження розв'язків задач про нелінійні коливання. Для більшості прикладних задач очевидна дія узагальнених сил внутрішньої дисипації в коливальній системі. Зокрема, згинні хвилі в стрижнях Фойгта–Кельвіна описуються лінійним рівнянням п'ятого порядку [3], яке враховує вплив дисипативних сил на динамічний процес. Ця проблема є актуальною інженерно-технічною задачею [4,5]. У статті досліджуємо нелінійну модель, що описується рівнянням

[28] Національний університет «Львівська політехніка»

$$A(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left((a_2(x,t)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right|^{p_2-2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left((a_1(x,t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|^{p_1-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) + d(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) + h(x)u + c_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + g\left(x, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = f(x,t) \qquad (1)$$

в необмеженій за просторовими змінними області. Рівняння (1) узагальнює модель коливання балки у середовищі з опором [5].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ

В області $Q_T = (0,+\infty)\times(0,T)$, $0 < T < \infty$ розглядаємо для рівняння (1) змішану задачу з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \qquad (2)$$

та крайовими умовами

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = 0. \qquad (3)$$

Позначимо $Q_\tau = (0,+\infty)\times(0,\tau)$, $Q_\tau^R = (0,R)\times(0,\tau)$ для довільних $\tau \in [0,T]$, $R > 1$. Використовуємо далі такі функційні простори:

$$H^2_{0,R}(0,R) = \left\{ u \in H^2(0,R) : u(0,t) = 0, \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = 0 \right\},$$

$$H^2_{0,loc}(0,+\infty) = \left\{ u \in H^2_{0,R}(0,R) \forall R > 1 \right\},$$

$$W^{1,p_1}_{0,R}(0,R) = \left\{ u \in W^{1,p_1}(0,R) : u(0,t) = 0 \right\},$$

$$W^{2,p_2}_{0,R}(0,R) = \left\{ u \in W^{2,p_2}(0,R) : u(0,t) = 0, \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = 0 \right\},$$

$$W^{2,p_i}_{0,loc}(0,+\infty) = \left\{ u : u \in W^{2,p_i}_{0,R}(0,R) \forall R > 1 \right\}, \quad i = 1,2,$$

$$L^r_{loc}(0,R) = \left\{ u : u \in L^r(0,R) \forall R > 1 \right\}, \quad r \in (1,+\infty].$$

Всюди далі $p' = p/(p-1)$, $p_2' = p_2/(p_2-1)$, $p_1' = p_1/(p_1-1)$, V^* позначає простір, спряжений до простору V. Стосовно коефіцієнтів, правої частини (1) та початкових даних припускаємо виконання умов:

(A) $\operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T^R} |a(x,t)| \le a_2^2 R^{\omega_2}$ для довільного $R>1$, де $0 \le \omega_2 < 1$, $a_2^2 > 0$;

$a(x,t) \ge a_0 > 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$; функція $\dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ належить до $L^\infty(Q_T)$;

(A21) $a_2 \le a^2(x,t) \le a^2 R^{\alpha_2}$, $a_1 \le a^1(x,t) \le a^1 R^{\alpha_1}$

для довільних $R>1$, $(x,t) \in Q_T^R$, де $0 \le \alpha_s < 1$, $a_s > 0$, $a^s > 0$,

$\alpha_s \in \left[0; \dfrac{3p_s - 2}{2p_s}\right)$, $s = 1,2$; $\dfrac{\partial^2 a^2}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial a^2}{\partial t}$, $\dfrac{\partial a^1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial a^1}{\partial t}$ належать до $L^\infty(Q_T)$;

(B) $\operatorname*{esssup}_{x\in(0,R)} |b(x)| \le b_2 R^{\kappa_2}$ для довільного $R>1$, де $0 \le \kappa_2 < 1$, $b_2 > 0$;

$b(x,t) \ge b_0$ для майже всіх $x \in (0,+\infty)$, де b_0 - додатна стала; функції b_1, $\dfrac{\partial^2 b}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial b_1}{\partial x}$, h належать до простору $L^\infty(0,+\infty)$; (C) функції c_1, $\dfrac{\partial c_1}{\partial t}$ належать до $L^\infty(Q_T)$; (D) $d \in L^\infty\left((0,T); L^\infty_{loc}(0,+\infty)\right)$, $d(x,t) \ge d_0 = \text{const}$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$; (G) функція $g(x,\eta)$ -вимірна за x для всіх η, неперервна за η для майже всіх $x \in (0,+\infty)$, причому для довільних $\xi, \eta \in \mathrm{R}$ та для майже всіх

$x \in (0,+\infty)$: $(g(x,\xi) - g(x,\eta))(\xi - \eta) \ge g_0 |\xi - \eta|^p$, $|g(x,\eta)| \le g_1 |\eta|^{p-1}$, де g_0, g_1 -додатні сталі, $p > 2$; функція $\dfrac{\partial g}{\partial \xi}$ - неперервна за ξ для майже всіх

$x \in (0,+\infty)$; (F) $f \in L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(0,+\infty))$; (U) $u_0 \in H^2_{0,loc}(0,+\infty)$;

$u_1 \in L^2_{loc}(0,+\infty)$; (P) $1 < p_2 < 2$, $1 < p_1 < 2$.

Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) в області Q_T називаємо функцію $u \in C([0,T]; H^2_{0,loc}(0,+\infty))$ таку, що

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C\left([0,T]; L^2_{loc}(0,+\infty)\right) \cap L^2\left((0,T); H^2_{0,loc}(0,+\infty)\right) \cap L^p\left((0,T); L^p_{loc}(0,+\infty)\right),$$

яка задовольняє умови (2) та інтегральну тотожність

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a_2(x,t)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right|^{p_2-2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\right]dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[a_1(x,t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|^{p_1-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}+b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+h(x)uv\right]dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[c_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}v-f(x,t)v+d(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}v+g\left(x,\frac{\partial u}{\partial t}\right)v\right]dxdt+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}v(x,\tau)-u_1(x)v(x,0)\right]dx=0 \qquad (4)$$

для довільної функції $v\in C^1([0,T];C_0^\infty(0,+\infty))$ та довільного $\tau\in(0,T]$.

Основний результат цієї роботи: при виконанні умов (A)-(P) існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)-(3) в Q_T.

3. МЕТОДИКА ОБГРУНТУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТУ

Спершу використаємо наступне *допоміжне твердження*. Нехай виконуються умови (A)-(P) і u та u^0 - узагальнені розв'язки відповідно задачі (1)-(3) та задачі (2)-(3) для рівняння $A(u)=f^0$. Нехай, крім того, $\frac{\partial(u-u^0)}{\partial t}\in L^2\left((0,T);L^2(0,R)\right)$ для довільного $R>1$. Тоді для довільних $\tau\in(0,T]$, $1<R_0<R$ правильна оцінка

$$I(u-u^0)=\int\limits_0^{R_0}\left[\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial u^0(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u^0(x,\tau)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2\partial t}\right)^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u^0}{\partial t}\right|^p\right]dxdt\le\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma\left(M_1R^{1-\beta}+\right.$$

$$\left.+M_2R^{1+(\alpha_2-1)\frac{2p_2}{2-p_2}}+M_3R^{1+(\alpha_1-1)\frac{2p_1}{2-p_1}}+M_4\int\limits_{Q_\tau^R}\left|f-f^0\right|^{p'}dxdt\right),(5)$$

де $\beta = \mathbf{min}\left\{(1-\omega_2)\frac{4q}{q-2};(1-\kappa_2)\frac{4q}{q-2};\frac{2q}{q-2}\right\}$, $q \in (2,p]$ - довільне число, $\gamma > \frac{4q}{q-2}$, M_1 - M_4 -додатні сталі, які не залежать від u, u^0, f, f^0.

Нехай $R > 1$, $\tau \in (0,T]$. Розглянемо функцію $\varphi_R(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - x^2}{R}, x \le R, \\ 0, x > R. \end{cases}$ Позначимо $w = u - u^0$ та віднімемо від інтегральної рівності (4) відповідну інтегральну рівність для u^0, f^0, поклавши $v = \frac{\partial w}{\partial t}\varphi_R^\gamma$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial t}\varphi_R^\gamma + a(x,t)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\varphi_R^\gamma\right) + b(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\varphi_R^\gamma\right) + \right.$$

$$+ b_1(x)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\varphi_R^\gamma\right) + a_2(x,t)\left(\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right|^{p_2-2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \left|\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2 \partial t}\right|^{p_2-2}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2 \partial t}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^0}{\partial t}\right)\varphi_R^\gamma\right) + a_1(x,t)\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right|^{p_1-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left|\frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial t}\right|^{p_1-2}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial t}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^0}{\partial t}\right)\varphi_R^\gamma\right) + c_1(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + h(x,t)w\right)dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[d(x,t)\frac{\partial w}{\partial t} - \left(f - f^0\right) + \left(g\left(x,\frac{\partial u}{\partial t}\right) - g\left(x,\frac{\partial u^0}{\partial t}\right)\right)\right]\frac{\partial w}{\partial t}\varphi_R^\gamma dxdt = 0 .$$

Використовуючи методику апріорних інтегральних оцінок, подібно до [6] обгрунтовуємо правильність оцінки (5).

2. Схема обгрунтування *існування.* Виберемо послідовність $k = 2,3,...$ та розглянемо в обмеженій області Q_T^k допоміжну задачу:

$$A(u) = f^{k,k}(x,t),\ u(x,0) = u_0^{k,k}(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1^{k,k}(x), \qquad (6)$$

$$u(0,t)=\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=0\,, \qquad u(k,t)=\frac{\partial^2 u(k,t)}{\partial x^2}=0\,, \qquad (7)$$

де $f^{k,k}(x,t)=\begin{cases} f^k(x,t), x\le k \\ 0, x>k \end{cases}$, $u_0^{k,k}(x)=u_0^k(x)\chi^k(x)$,

$u_1^{k,k}(x)=u_1^k(x)\chi^k(x)$, причому $\chi^k\in C^4(\mathrm{R})$, $\chi^k(x)=\begin{cases} 1, x\le k-1 \\ 0, x>k \end{cases}$,

$0\le\chi^k(x)\le 1$. Послідовності $\{f^k\}, \{u_0^k\}, \{u_1^k\}$ такі, що $f^k\in C^1([0,T];C_0^1(0,+\infty))$, $u_0^k\in C_0^4(0,+\infty)$, $u_1^k\in C_0^2(0,+\infty)$ і $f^k\to f$ в $L^{p'}((0,T);L_{loc}^{p'}(0,+\infty))$, $u_0^k\to u_0$ в $H_{0,loc}^2(0,+\infty)$, $u_1^k\to u_1$ в $L_{loc}^2(0,+\infty)$ при $k\to\infty$. На підставі [7, с. 67-68] можна стверджувати: існує єдиний узагальнений розв'язок $u^k\in C([0,T];H_0^2(0,k))$ задачі (6)-(7) в області Q_T^k, такий що

$$\frac{\partial u^k}{\partial t}\in C\left([0,T];L^2(0,k)\right)\cap L^\infty\left((0,T);H_0^2(0,k)\right)\cap L^p\left(Q_T^k\right),$$

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}\in L^\infty\left((0,T);L^2(0,k)\right)\cap L^2\left((0,T);H_0^2(0,k)\right).$$

Розглянемо тепер послідовність задач (6)-(7) для $k=2$, $k=3$,..., довизначивши u^k нулем на $Q_T\setminus Q_T^k$. Використовуючи допоміжну оцінку (5) та міркування, подібні до [6], показуємо далі, що послідовність $\{u^k\}$ - фундаментальна у $C([0,T];H_{0,loc}^2(0,+\infty))$, а $\left\{\frac{\partial u^k}{\partial t}\right\}$ - у просторі $W=C\left([0,T];L_{loc}^2(0,+\infty)\right)\cap L^2\left((0,T);H_{0,loc}^2(0,+\infty)\right)\cap L^p\left((0,T);L_{loc}^p(0,+\infty)\right)$. Враховуючи довільність R_0, отримаємо, що $\{u^k\}\to$ до u в $C([0,T];H_{0,loc}^2(0,+\infty))$, а $\left\{\frac{\partial u^k}{\partial t}\right\}\to\frac{\partial u}{\partial t}$ в W. При цьому для функції u виконуються умови (2), (3). Крім того, зі сильної збіжності $\left\{\frac{\partial u^k}{\partial t}\right\}\to\frac{\partial u}{\partial t}$ легко отримати, що $g\left(x,\frac{\partial u^k}{\partial t}\right)\to g\left(x,\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ слабко в $L^{p'}((0,T);L_{loc}^{p'}(0,+\infty))$ [8, с. 25]. Зауважимо, що подібно до [6] маємо

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\left|\frac{\partial^3 u^k}{\partial t\partial x^2}\right|^{p_2-2}\frac{\partial^3 u^k}{\partial t\partial x^2}\right)\to\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right|^{p_2-2}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right)\text{ слабко в } L^{p_2'}\left((0,T);V_2^*\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial^2 u^k}{\partial t\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial^2 u^k}{\partial t\partial x}\right)\to\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\text{ слабко в } L^{p_1'}\left((0,T);V_1^*\right),$$

де $V_2 = W_{loc}^{2,p_2}(0,+\infty)$, $V_1 = W_{loc}^{1,p_1}(0,+\infty)$. Отже, u є узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).

3. Обгрунтування *єдиності розв'язку.* Розглянемо два довільних розв'язки u^1 та u^2 задачі (1)-(3). Подібно до (5) для різниці $w = u^1 - u^2$ можна отримати оцінку

$$I(w) \le \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\gamma}\left(M_1 R^{1-\beta} + M_2 R^{1+(\alpha_2-1)\frac{2p_2}{2-p_2}} + M_3 R^{1+(\alpha_1-1)\frac{2p_1}{2-p_1}}\right)$$

для довільних τ, R, R_0 таких, що $1 < R_0 < R$, $\tau \in [0,T]$. Аналогічно, як при обгрунтуванні фундаментальності, одержуємо при $R \to +\infty$, що $I \le 0$ для довільного фіксованого $R_0 > 1$. Отже, $u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q_T^{R_0}$. Довільність R_0 завершує схему обгрунтування єдиності.

4. ВИСНОВКИ

Отримано умови коректності розв'язку в математичній моделі нелінійних коливань необмеженої балки з урахуванням дії дисипативних сил та під впливом нелінійних сил опору-достатні умови існування та єдиності розв'язку в класі локально інтегровних функцій. Проблема встановлення описаних вище класів коректності викликає інтерес не лише з огляду практичного застосування, а й з точки зору теоретичного вивчення різних крайових задач, крайові умови в яких описують механічні моделі, що вивчають в нелінійній теорії коливань. Отримані якісні результати, які обґрунтовують можливість застосування до вказаної задачі методу Гальоркіна, в подальшому при дослідженні динамічних характеристик розв'язків розглянутих математичних моделей коливань дають можливість застосовувати різні наближені методи.

1. Сокіл Б. І. Нелінійні коливання механічних систем і аналітичні методи їх досліджень: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 05.02.09 "Динаміка та міцність машин"/ Б. І. Сокіл; Національний ун-т "Львівська політехніка". – Львів, 2001. – 36 с. 2. Сокіл Б.І. Поперечні коливання нелінійно пружного середовища і метод Д'Аламбера у їх дослідженні/ Б.І.Сокіл, А.П.Сеник, І.І.Назар, М.Б.Сокіл // Вісник Національного університету "Львівська політехніка".– 2004. – № 509. – С. 105–110. 3. Ерофеев В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. / Ерофеев В.И., Кажаев В. В., Семерикова Н.// – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 208 с. 4. Ahmadian H. Nonlinear model identification of a frictional contact support / Ahmadian H. Jalali H., Pourahmadian F.// Mechanical Systems and Signal Processing. – 2010. – Vol. 24, issue 8.– pp. 2844–2854. 5. Gu R.J. Frictional wear of a thermoelastic beam / Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M. // Journ. Math. Anal. And Appl. – 2000. – 242.– pp. 212 – 236. 6. Пукач П.Я. Мішана задача в необмеженій області для рівняння типу коливань балки зі збуреним лінійним оператором // Математичний вісник Наук. тов. ім. Шевченка.- 2007.- № 4 .- С. 149-165. 7. Пукач П.Я. Змішана задача для одного сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області// Прикладні пробл.мех. та матем. - Вип. 4. - 2006. - С. 59 - 69. 8. Лионс Ж.- Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.- М.: Эдиториал УРСС, 2002.