УДК 519.65

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ СУМОЮ ПОЛІНОМУ Й ЛОГАРИФМІЧНОГО ВИРАЗУ З ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ

П. С. Малачівський[1], Я. В, Пізюр[2], В. А. Андруник[2]

[1]Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна, Українська академія друкаства, Львів
[2]Національний університет "Львівська політехніка" вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

Встановлено достатню умову існування чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу з інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Запропоновано алгоритм визначення параметрів такого наближення з найменшою абсолютною похибкою за схемою Ремеза.

Ключові слова: *чебишовське наближення нелінійним виразом; чебишовське наближення з інтерполюванням; схема Ремеза.*

Постановка проблеми. Чебишовське наближення з інтерполюванням у крайніх точках відрізка використовують при побудові неперервних мінімаксних сплайн-наближень [1, 2]. Неперервні сплайни використовують для опису контурів об'єктів [3], подання траєкторії руху різальних інструментів для верстатів з програним керуванням [4] тощо. Оптимальні за точністю неперервні сплайн-наближення при фіксованій кількості параметрів можна отримати з використанням чебишовського (мінімаксного) наближення тобто неперервного мінімаксного сплайн-наближення [1].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Властивості чебишовського наближення з інтерполюванням висвітлено в працях [2, 5, 6]. У працях [2, 5] досліджено властивості чебишовського наближення сумою поліному й нелінійного виразу від одного параметра, зокрема, сумою поліному й експоненти та степеневого виразу. Визначення параметрів чебишовського наближення сумою константи й логарифмічного виразу з відтворенням значення функції в заданій точці описано в [7]. Умови існування чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу описано в праці [8].

Мета статті. У статті досліджено властивості чебишовського наближення сумою поліному та логарифмічного виразу з інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Цей вираз не задовольняє умову Гаара [2] й, відповідно, чебишовське наближення таким виразом не завжди існує. Окрім того, в разі існування чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу виникають труднощі при визначенні параметра, що входить у вираз нелінійно. Тому необхідно встановити клас функцій, для яких чебишовське наближення сумою поліному й логарифмічного виразу існує і запропонувати метод обчислення значення параметра, що входить у вираз нелінійно.

Виклад основного матеріалу дослідження. Задача чебишовського наближення неперервної на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$ сумою поліному й логарифмічного виразу

$$L_n(a; x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + A\ln(x+p),\ A \neq 0,\ p > -\alpha,\ n = 0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

з інтерполюванням полягає у визначенні таких параметрів a_i $\left(i = \overline{0, n}\right)$, A і p, при яких відхилення виразу (1) від $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$ досягає найменшого можливого значення [1. 2]. Дослідження чебишовського наближення виразом (1) з інтерполюванням ускладнюється тим, що цей вираз не задовольняє умову Гаара, тому виникає питання існування такого наближення для функцій $f(x)$ і його єдиності.

Властивості чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у крайніх точках. Розглянемо неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$, що задовольняють нерівності

$$0 < W^{(n)} < W_2^{(n)}, \quad (2)$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f;\ z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(f;\ z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}, \quad (3)$$

$$W_2^{(n)} \equiv \frac{D_{n+1}(s_{n+1}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(s_{n+1}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}, \quad (4)$$

$$s_k(x) = x^k,$$

$$D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1}) = \frac{D_{k-1}(U;\ z_{j+1}, z_{j+3}, \ldots, z_{j+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_{j+1}, z_{j+3}, \ldots, z_{j+k+1})} - \frac{D_{k-1}(U; z_j, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_j, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k})},\ k = \overline{2,\ n+1},\ j = \overline{1,\ n-k+3}, \quad (5)$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = U(z_{j+2}) - U(z_j), \qquad j = \overline{1,\ n+2},$$

а z_j $\left(j = \overline{1,\ n+4}\right)$ – довільні, впорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ $\left(j = \overline{1,\ n+3}\right)$ числа з відрізка $[\alpha, \beta]$.

Достатню умову існування чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням її значення у крайніх точках відрізка сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді:

а) достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$

сумою полінома й логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням її значення у крайніх точках відрізка α і β (або тільки в одній із них) є виконання нерівностей (2), в яких у випадку інтерполювання в обох крайніх точках

$$D_1\left(U; z_j, z_{j+2}\right) = \begin{cases} U(z_3) + U(z_2) - 2U(\alpha) - 2U(\alpha), \text{ якщо } \quad j = 1, \\ U\left(z_{j+2}\right) - U\left(z_j\right), \quad \text{якщо} \quad j = \overline{2, n+1}, \\ 2U\left(z_{j+2}\right) - U\left(z_{n+2}\right) - U\left(z_{n+3}\right), \text{ якщо } \; j = n+2, \end{cases} \tag{6}$$

у випадку інтерполювання у точці α – $z_1 = \alpha$,

$$D_1\left(U; z_j, z_{j+2}\right) = \begin{cases} U(z_3) + U(z_2) - 2U(\alpha) - 2U(\alpha), \text{якщо } \; j = 1, \\ U\left(z_{j+2}\right) - U\left(z_j\right), \quad \text{якщо} \quad j = \overline{2, n+2}, \end{cases} \tag{7}$$

а в разі інтерполювання в точці β – $z_{n+4} = \beta$,

$$D_1\left(U; z_j, z_{j+2}\right) = \begin{cases} U\left(z_{j+2}\right) - U\left(z_j\right), \text{ якщо} \quad j = \overline{1, n+1}, \\ 2U\left(z_{j+2}\right) - U\left(z_{n+2}\right) - U\left(z_{n+3}\right), \text{якщо } \; j = n+2; \end{cases} \tag{8}$$

б) у випадку виконання умов пункту а існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою поліному й логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і відтворенням її значення у крайніх точках відрізка. Параметри такого наближення задовольняють систему рівнянь

$$f\left(z_j\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A \ln\left(z_j + p\right) = \lambda_j (-1)^j \mu, \quad j = \overline{1, n+4}, \tag{9}$$

в якій

$$\lambda_j = 1, \quad j = \overline{1, n+4};$$

z_j $\left(j = \overline{1, n+4}\right)$ – впорядковані за зростанням точки альтернансу; $z_1 = \alpha$ і $\lambda_1 = 0$, якщо інтерполювання проводиться у точці α; $z_{n+4} = \beta$ і $\lambda_{n+4} = 0$, якщо інтерполювання проводиться у точці β.

Достатній умові існування (2) чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням у крайніх точках відрізка задовольняють, зокрема, неперервно диференційовні функції $f(x)$ $\left(f(x) \in C^{(n+1)}[\alpha, \beta]\right)$, n-на і $(n+1)$-ша похідні яких строго монотонні на $[\alpha, \beta]$. При цьому характер їхньої монотонності повинен бути протилежним: якщо одна з них зростаюча, то друга має бути спадною, і навпаки.

Умова (2) не є необхідною для існування чебишовського наближення функції $f(x)$ з абсолютною похибкою сумою поліному й логарифмічного виразу (1) й інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Її виконання необхідне лише в точках чебишовського альтернансу. У разі використання алгоритму Ремеза [2] для знаходження параметрів чебишовського наближення виразом (1) виконання умови (2) необхідне в усіх точках проміжних наближень до точок альтернансу.

Визначення параметрів чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Відповідно до теореми про існування чебишовського наближення функції $f(x)$ нелінійним виразом з інтерполюванням [2, 5], параметри чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу (1), можна визначити за схемою Ремеза. Таке чебишовське наближення у випадку інтерполювання в обох крайніх точках відрізка α і β має $(n+2)$-і точки альтернансу, а в разі інтерполювання лише в одній із крайніх точок – $(n+3)$-и точки альтернансу.

Нехай z_i $\left(i=\overline{2,\, n+3}\right)$ – точки альтернансу у випадку наближення з інтерполюванням у обох крайніх точках відрізка, z_i $\left(i=\overline{2,\, n+4}\right)$ – точки альтернансу в разі чебишовського наближення виразом (1) з інтерполюванням лише у точці α, а z_i $\left(i=\overline{1,\, n+3}\right)$ – у точці β. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову теореми й точки альтернансу відомі, то параметри a_i $\left(i=\overline{0,\, n}\right)$ і A чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою поліному й логарифмічного виразу (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням у крайніх точках відрізка визначаються за формулами

$$A = D_{n+1}(f;\, z_1,\, z_2, \ldots,\, z_{n+3}) / D_{n+1}(\varphi; z_1,\, z_2, \ldots,\, z_{n+3}), \tag{10}$$

$$a_k = \frac{D_k(f; z_1, \ldots, z_{k+2}) - \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i D_k(s_i; z_1, \ldots, z_{k+2}) - A D_k(\varphi; z_1, \ldots, z_{k+2})}{D_k(s_k; z_1,\, z_2, \ldots,\, z_{k+2})}, \quad k=\overline{1,\ n}, \tag{11}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(f(z_2) + f(z_3) - \sum_{i=1}^{n} a_i \left(z_2^i + z_3^i\right) - A\left(\hbar\,(z_2+p) + \hbar\,(z_3+p)\right)\right), \tag{12}$$

де $\varphi(p, x) = \hbar\,(x+p)$, вирази $D_k(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k+1})$ визначаються залежно від точок інтерполювання за відповідними формулами (5)-(8). Значення параметра p є розв'язком трансцендентного рівняння

$$\omega_n(p) = W^{(n)}, \tag{13}$$

де $\omega_n(p) = \dfrac{D_{n+1}(\varphi;\, z_2,\, z_3, \ldots,\, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi;\, z_1,\, z_2, \ldots,\, z_{n+3})}$,

а $W^{(n)}$ визначається формулою (3).

Розв'язок рівняння (13) при $\varphi(p; x) = \hbar\,(p+x)$ можна знайти шляхом перебору з пробними значеннями

$$p_i = p_{i-1} + h_p, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

де $p_0 = -\alpha + 10^{-4}$,

$$h_p = \frac{W^{(n)}(z_{n+3} + z_1) - z_{n+4} - z_2}{2\left(1 - W^{(n)}\right)} \tag{15}$$

до досягнення виконання нерівності

$$\left(\omega_n(p_i) - W^{(n)}\right)\left(\omega_n(p_{i-1}) - W^{(n)}\right) \le 0 \cdot \tag{16}$$

Крок перебору h_p (15) покладається рівним наближеному значенню параметра p, виходячи з оцінки значення $\omega_n(p)$ – лівої частини рівняння (13).

Для уточнення значення p в інтервалі $[p_{i-1}, p_i]$ можна застосувати метод хорд або ділення навпіл. Для тестових прикладів при уточненні значень параметра p швидко збігався метод Довелла [9].

Висновок. Достатньою умовою існування чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу (1) для функції $f(x)$ із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням у крайніх точках відрізка є виконання нерівностей (2) з врахуванням (6)-(8). Цій умові задовольняють, зокрема, неперервно диференційовні функції $f(x)$ $\left(f(x) \in C^{(n+1)}[\alpha, \beta]\right)$, n-на і $(n+1)$-ша похідні яких строго монотонні на $[\alpha, \beta]$. При цьому характер їх монотонності повинен бути протилежним: якщо одна з них зростаюча, то друга має бути спадною, і навпаки.

Параметри a_i $\left(i = \overline{0, n}\right)$ і A чебишовського наближення сумою поліному й логарифмічного виразу (1) визначаються за формулами (10)-(12). Значення параметра p є коренем трансцендентного рівняння (13). Для знаходження розв'язку цього рівняння запропоновано спосіб перебору з пробними значеннями (15).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
2. Малачівський П. С., Скопецький В. В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення – К.: Наук. думка, 2013. – 270 с.
3. Исаев В. К., Плотников С. А. Обратная задача Чебышева и сплайны Чебышева // Тр. МИАН. –1995. –Т. 211. –С. 164-185.
4. Бердышев В. И., Субботин Ю. Н. Численные методы приближения функций. – Свердловск: Средне-Уральское кн. изд-во, 1979. – 120 с.
5. Skopetskii V. V., Malachivskii P. S. Chebyshev approximation of functions by the sum of a polynomial and an expression with a nonlinear parameter and endpoint interpolation // Cybernetics and Systems Analysis, – January 2009, Volume 45, Issue 1, pp 58–68.
6. Малачівський П. Рівномірне наближення функцій з інтерполюванням у заданих точках // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2006. – Вип. 4. – С. 142-150.
7. Воробель Р. А., Дудыкевич В. Б., Попов Б. А. Нелиней-ные равномерные приближения с интерполированием // Отбор и передача информ., 1982. Вып. 65. – С. 17–23.

8. Малачівський П. Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2005. Вип. 1. – С. 134-145.
9. Попов Б. А., Малачивский П. С. Наилучшие чебышевские приближения суммой многочлена и нелинейных функций. – Львов, 1984. – 79 с. – (Препр. / АН УССР, Физико-мех. ин-т им. Г. В. Карпенко, N 85).

REFERENCES

1. Popov B. *A*. (1989). «Ravnomernoye priblizheniye splaynami» Kiyev: Nauk. dumka.– 272 *p*. (in Russian)
2. Malachivskyy P. S., Skopetskyy *V. V. (2013)*. «Neperervne i hladke minimaksne splayn-nablyzhennia» K.: Nauk. dumka.– 270 *p*. (in Ukrainian)
3. Isayev V. K., Plotnikov S. A. (1995). «Obratnaya zadacha Chebysheva i splayny Chebysheva» Tr. MIAN.- Vol. 211.– pp. 164-185. (in Russian)
4. Berdyshev V. I. Subbotin Yu. N. (1979). «Chislennyye metody priblizheniya funkciy». – Sverdlovsk: Srednye-Uralskoye kn. izd-vo. – 120 p. (in Russian)
5. Skopetskii *V. V., Malachivsk*ii P. S. (2009). Chebyshev approximation of functions by the sum of a polynomial and an expression with a nonlinear parameter and endpoint interpolation // Cybernetics and Systems Analysis, – January, 2009 Volume 45, Issue 1, pp 58–68. (in English)
6. Malachivskyy P. (2006). «Rivnomirne nablyzhennia funkciy z interpoliuvanniam u zadanykh tochkakh» Fizyko-matematychne modeliuvannia ta informaciyni tekhnolohii. № 4.– *pp*. 142-150. (in Ukrainian)
7. Vorobel R. *A*., Dudykevych V. *B*., Popov B. *A*. (1982). «Nelineynyye ravnomernyye priblizheniya s interpolirovaniyem» Otbor i peredacha informaciyi. № 65.– pp. 17-23. (in Russian)
8. Malachivskyy P. S. (2005). «Chebyshovske nablyzhennia sumoyu mnohochlena i funkcii z odnym neliniynym parametrom» Fizyko-matematychne modeliuvannia ta informaciyni tekhnolohii. № 1.– *pp*. 134-145. (in Ukrainian)
9. Popov B. *A*., Malachivskyy P. S. (1984). «Nailuchshiye chebyshevskiye priblizheniya summoy mnogochlena i nelineynykh funkciy» L'vov.– 79 *p*.– (Prepr./ AN USSR, Fiziko-mekh. in-t im. H. *V. Karpenko, N 85*) (in Russian)

UDC 519.65

CHEBYSHEV APPROXIMATION BY THE SUM OF A POLYNOMIAL AND LOGARITHMIC EXPRESSION WITH INTERPOLATION

P. Malachivskyy,

Center of Mathematical Modeling, Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
15, Dudayev's St. Lviv 79005, Ukraine,
National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv
Petro.Malachivskyy@gmail.com

Ya. Pizyur,

National University "Lviv Polytechnic", Lviv
12, S.Bandery St., Lviv, 79013, Ukraine,
pizyur@yahoo.com

V. Andrunyk.

National University " Lviv Polytechnic ", Lviv
12, S.Bandery St., Lviv, 79013, Ukraine,
vasyl.a.andrunyk@lpnu.ua

A sufficient condition for the existence of the Chebyshev approximation by the sum of a polynomial and logarithmic expression with interpolation at the boundary points of a segment has been established. The algorithm for determining the parameters of such an approximation with the minimal absolute error on the Remez scheme has been suggested.

Key words: *Chebyshev approximation by a nonlinear expression, Chebyshev approximation with interpolation, Remez scheme.*

Стаття надійшла до редакції 14.02.2017
Received 14.02.2017