

УДК 539.375

**ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ
ОБОЛОНКИ З ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ТА ВНУТРІШНЬОЮ
ТРІЩИНОЮ**Ю.І. Прокопович¹, Я.М. Пелех², І.С. Костенко², Б.Б. Пахолок²*¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України**²Національний університет „Львівська політехніка”*

Задача дослідження пружно-пластичного стану замкненої циліндричної оболонки, ослабленої внутрішньою тріщиною та з'єднаної з пружним заповнювачем зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Побудовано розв'язок отриманої системи сумісно з умовами пластичності тонких оболонок, умовами обмеженості напружень та умовами однозначності переміщень. Досліджено вплив пружного середовища, геометричних та пружних характеристик на розкриття тріщини і розміри пластичних зон.

Ключові слова: *циліндрична оболонка, тріщина, пружно-пластична деформація, напруження.*

Вступ. Тонкостінні елементи конструкцій, що взаємодіють із середовищем, в якому вони знаходяться, моделюють оболонками, на які діє додаткове навантаження як реакція середовища. Такі математичні моделі використовують, наприклад, для наближеного розрахунку багат шарових трубопроводів з розрізами в середніх шарах, які застосовують для зміни траєкторії тріщини, що поширюється.

Розроблення методів розрахунку оболонок, що знаходяться в пружному середовищі та ослаблені дефектами типу тріщин і конструктивними розрізами, має велике практичне значення. Досить повний огляд робіт, присвячених дослідженню тонкостінних елементів конструкцій, які знаходяться в пружному середовищі, зроблено в [1, 2]. Але вони стосуються, як правило, оболонок без гострокінцевих концентраторів. Тут досліджено вплив реакції пружного середовища на розкриття берегів тріщини у пружно-пластичній замкнутій циліндричній оболонці.

Формулювання задачі. Розглянемо замкнуту пружно-пластичну ізотропну циліндричну оболонку завтовшки $2h$ з пружним заповнювачем у вигляді нескінченного циліндра товщиною $2h_s$, який з'єднаний з оболонкою. Віднесемо цю оболонку до триортгональної системи координат $\alpha\beta\gamma$. Нехай оболонка ослаблена поздовжньою внутрішньою тріщиною завдовжки $2l_0$, яка розміщена в перерізі $\beta = 0$ і обмежена лініями паралельними координатним. Відстань від границі тріщини до зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки $2d_2$ і $2d_1$ відповідно. Вважатимемо, що оболонка і береги тріщини завантажені лише си-

метричними відносно лінії тріщини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують, а її вершини знаходяться в однакових умовах. Обмежимося розглядом досить глибоких тріщин ($d_3 = d_1 + d_2 \leq 0,6h$). Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що в околі тріщини по всій глибині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, відповідно до δ_c – моделі, зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки, тобто в області $x \in]-x_0; x_0[$, $\gamma \in [-h; -h + 2d_1] \cup [h - 2d_2; h]$ діють постійні напруження $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$, де σ_B та σ_T , границя міцності та поріг текучості матеріалу. В пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині, тобто в областях $\gamma \in [-h; h]$, $\alpha \in]-\alpha_p; \alpha_0[\cup]\alpha_0; \alpha_p[$, $\alpha_p = l_p / R$; (l_p – довжина пластичної зони на продовженні тріщини) діють невідомі нормальне зусилля N та згинний момент M , які у випадку ідеально пружно-пластичного матеріалу задовольняють одну з умов пластичності Треска [3]. У випадку матеріалу зі зміцненням умови пластичності мають вигляд

$$N(x) = P \left[\frac{(1 - m^*) (|x| - x_0)}{(x_1 - x_0)} + m^* \right],$$

$$M(x) = H \left[\frac{(1 - m^*) (|x| - x_0)}{(x_1 - x_0)} + m^* \right], \quad x_0 \leq |x| \leq x_1, \quad m^* = \frac{\sigma_B}{\sigma_T}, \quad (1)$$

де $2x_0$ – довжина реальної тріщини;

$2x_1$ – довжина фіктивної тріщини;

P, H – невідомі сталі, які повинні задовольняти задану умову пластичності, наприклад, умову пластичного шарніру

$$\left[\frac{P}{2h\sigma_T} \right]^2 + \frac{|H|}{h^2\sigma_T^*} = 1.$$

Тоді

$$\left(\frac{N(x)}{2h\sigma^*(x)} \right)^2 + \frac{|M(x)|}{h^2\sigma^*(x)} = 1, \quad x_0 \leq |x| \leq x_1,$$

$$\sigma^*(x) = \frac{(\sigma_T - \sigma_B)(|x| - x_0)}{x_1 - x_0} + \sigma_B.$$

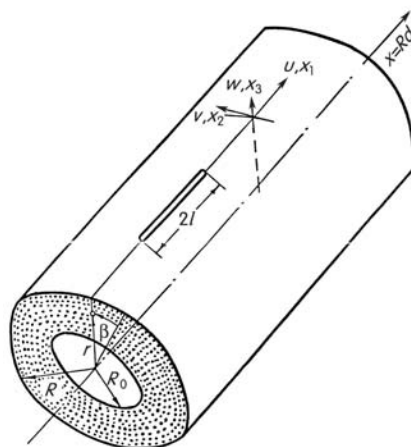


Рис. 1. Схема з'єднання оболонки з тріщиною та пружного середовища.

Таким чином, у рамках прийнятої моделі ненаскрізню тріщину завдовжки $2x_0$ замінюємо наскрізною невідомої довжини $2x_1$, на берегах якої виконуються умови

$$N_s(x) = \begin{cases} N_S^{(1)} + N^l - N_S^0, & |x| < x_0, \\ N - N_S^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1, \end{cases}$$

$$M_s(x) = \begin{cases} M_S^{(1)} + M^l - M_S^0, & |x| < x_0, \\ M - M_S^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1, \end{cases} \quad (2)$$

N^l, M^l – нормальне зусилля та згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під тріщиною і які згідно з прийнятими припущеннями про напруження в цих зонах визначають за формулами

$$N^l = 2d_3\sigma^0, \quad M^l = 2\sigma^0(h - d_3)(d_2 - d_1),$$

N_S^1, M_S^1 – зусилля та момент, прикладені до берегів тріщини;
 N^0, M^0 – ці ж параметри основного напруженого стану.

Основні співвідношення ослабленої тріщиною циліндричної оболонки з пружним заповнювачем. Під час визначення збуреного напруженого стану оболонки в околі тріщини за вихідні візьмемо рівняння теорії тонких оболонок в переміщеннях, які враховують наявність тріщини та реакцію з боку заповнювача. Цю реакцію визначатимемо наближено за допомогою співвідношень тривимірної теорії пружності для циліндра.

Приймемо, що оболонка та заповнювач виготовлені із однорідних ізотропних матеріалів. Систему рівнянь у переміщеннях для циліндричної оболонки з заповнювачем і тріщиною $|\alpha| < \alpha_0, \beta = 0 (\alpha_0 = l_0 / R)$ запишемо у вигляді

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w = g_k^0 + \frac{R^2}{B} X_k \quad (k = \overline{1,3}). \quad (3)$$

Тут $B = 2Eh/(1-x^2)$; X_k – складові реактивного поверхневого навантаження з боку заповнювача; L_{km} ($m = \overline{1,3}$), g_k^0 – оператори, які приведені в монографії [3] при дослідженні відповідної пружної задачі.

Якщо оболонка жорстко з'єднана з заповнювачем, то умови на контактній поверхні відповідають рівності векторів переміщень та напружень оболонки і заповнювача. Кінематичні умови мають вигляд

$$u = s_x, v = s_\beta, w = s_r \quad (r = R) \quad (4)$$

s_x, s_β, s_r – компоненти вектора переміщень пружного заповнювача.

Статичні умови

$$X_1 = -\sigma_{rx}, X_2 = -\sigma_{r\beta}, X_3 = -\sigma_{rr} \quad (r = R), \quad (5)$$

де $\sigma_{rx}, \sigma_{r\beta}, \sigma_{rr}$ – дотичні та нормальні напруження в пружному заповнювачі.

Якщо заповнювач вставлений в оболонку так, що під час деформації допускається вільне ковзання, але без відриву між ними, то

$$w = s_r, \sigma_x = 0, \sigma_{r\beta} = 0, X_3 = -\sigma_r \quad (r = R). \quad (6)$$

Зауважимо, що подані умови (4)–(6) повинні виконуватись, строго кажучи, при $r = R - h$, а не при $r = R$. Але під час розгляду тонкої оболонки поверхню контакту ототожнюють з її серединною поверхнею. Похибка такого припущення має порядок похибки вихідних рівнянь (3), що ґрунтуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

Компоненти напружень $\sigma_{rx}, \sigma_{r\beta}, \sigma_{rr}$ в заповнювачі зв'язані з компонентами переміщень формулами (закон Гука)

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= G_S \left(\frac{\partial S_x}{\partial r} + \frac{\partial S_r}{\partial x} \right), & \sigma_{rr} &= 2G_S \left(\frac{v_S \Delta}{1-2v_S} + \frac{\partial S_r}{\partial r} \right), \\ \sigma_{r\beta} &= G_S \left(\frac{\partial S_\beta}{\partial r} \right) - \frac{S_\beta}{r} + \frac{\partial S_r}{\partial \beta}, \\ \Delta &= \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_\beta}{(r \partial \beta)} + \frac{S_r}{r}, & G_S &= \frac{E_S}{2(1-v_S)}, \end{aligned} \quad (7)$$

E_S, G_S – модулі пружності під час розтягу та зсуву;

v_S – коефіцієнт Пуассона заповнювача.

Нехай товщина пружного заповнювача така, що оболонку з заповнювачем можна розглядати як тонку двошарову. Під час дослідження напруженого стану суцільних (без тріщини) двошарових циліндричних оболонок в роботах [4, 5] на основі рівнянь теорії пружності показано, що для шарів невеликої товщини

$2h_0 / R \leq 1/5$ ($h_0 = h + h_s$) нормальне переміщення майже не міняється по товщині шарів. Значить, для тонкостінного пружного заповнювача можна прийняти

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} = 0 \quad (r = R). \quad (8)$$

Похідні від тангенціальних переміщень S_x та S_β на поверхні контакту з достатньою точністю можна апроксимувати виразами

$$\frac{\partial S_x}{\partial r} = K_1^0 \frac{S_x}{R}, \quad \frac{\partial S_\beta}{\partial r} = K_2^0 \frac{S_\beta}{r} \quad (r = R). \quad (9)$$

Із умови, що тангенціальні переміщення S_x, S_β в заповнювачі, викликані стрибками переміщень на лінії тріщини в оболонці (на місці тріщини допускається відлипання оболонки від заповнювача), набувають найбільших значень на поверхні контакту, впливає, що $K_1^0 > 0, K_2^0 > 0$.

На основі виразів (8), (9), формул (7) та умов контакту (4), (5) отримуємо:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{G_S}{R} \left(K_1^0 u + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), & X_2 &= -\frac{G_S}{R} \left(K_2^0 v + v + \frac{\partial w}{\partial \beta} \right), \\ X_3 &= -\frac{2G_S}{R(1-2\nu_S)} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Інтегральні рівняння задачі. Підставивши наведені співвідношення у рівняння (3), дістанемо систему ключових рівнянь для циліндричної оболонки, з'єднаної з заповнювачем і ослабленої тріщиною:

$$L_{k1}^0 u + L_{k2}^0 v + L_{k3}^0 w = g_k^0 (\varepsilon_{ij}^0, K_{ij}^0) (k = \overline{1,3}). \quad (11)$$

Використовуючи операторний метод, розв'язок рівнянь (11), що зникає на нескінченності, зобразимо у вигляді

$$u = R \sum_{j=2}^3 L_{ju} \varphi_j + P_{ju} \psi_j, \quad v = R \sum_{j=2}^3 L_{jv} \varphi_j + P_{jv} \psi_j, \quad w = R \sum_{j=2}^3 L_{jw} \varphi_j + P_{jw} \psi_j, \quad (12)$$

Тут L_{ji}, P_{ji} ($i = u, v, w$) – мінори визначника рівнянь (11).

Функції φ_2, ψ_2 визначають з рівнянь

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^0, \quad D\psi_2 = Rk_{22}^0. \quad (13)$$

Диференціальний оператор D ключових рівнянь (13) в даному випадку набуде вигляду

$$\begin{aligned} D &= \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + c^{-2} \partial_1^4 + b_1 \partial_1^6 + b_2 \partial_1^4 \partial_2^2 + b_3 \partial_1^2 \partial_2^4 + b_4 \partial_2^6 + b_5 \partial_1^4 + b_6 \partial_1^2 \partial_2^2 + \\ &+ b_7 \partial_2^4 + b_8 \partial_1^2 + b_9 \partial_2^2 + b_{10}, \end{aligned} \quad (14)$$

де b_i ($i = \overline{1,10}$) наведені в [3, с. 242-243].

Задача про визначення збуреного напруженого стану в оболонці з тріщиною з врахуванням (12)–(14), та умов (2) зводиться до системи інтегральних рівнянь:

$$\int_{-x_1}^{x_1} \{F_1(u) \left[\frac{1}{u-s} + K_{11}(\alpha_0(s-u)) \right] + F_2(u) K_{12}(\alpha_0(s-u))\} du = 2\pi f_1^0(s),$$

$$\int_{-x_1}^{x_1} \{F_1(u) K_{21}(\alpha_0(s-u)) + F_2(u) \left[K_{22}(\alpha_0(s-u)) + \frac{a_{22}}{u-s} \right]\} du = 2\pi f_2^0(s). \quad (15)$$

Тут

$$F_1(\alpha) = R^{-1} \frac{d}{d\alpha} [v(\alpha)]; \quad F_2(\alpha) = -c \frac{d}{d\alpha} [\theta_2(\alpha)]; \quad a_{22} = 3 - 2\nu - \nu^2;$$

$$f_1^0(\alpha) = -\frac{N_2^0(\alpha)}{Eh}; \quad f_2^0(\alpha) = -\frac{M_2^0(\alpha)}{RcEh};$$

$$K_{11}(z) = \alpha_0 \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{z}{2} \right) - K_{11}^0(z) \right];$$

$$K_{12}(\alpha) = -\alpha_0 K_{12}^0(z); \quad K_{21}(z) = -\alpha_0 K_{21}^0(z);$$

$$K_{22}(z) = \alpha_0 \left[a_{22} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{z}{2} \right) \right) - K_{33}^0(z) \right],$$

де K_{ij}^0 - регулярні частини ядер [3, с. 243-244].

Відмітимо, що в системі (15) невідомі границі інтегрування (невідомо довжина пластичної зони l_p). Крім цього в правих частинах невідомі зусилля N та момент M . Тому, систему (15) розв'язуємо сумісно з умовами (1) для матеріалу, якому притаманне зміцнення. Вимагаємо, щоб виконувалась умова обмеженості напружень в кінці пластичних зон. Для цього достатньо щоб коефіцієнти інтенсивності зусилля та моменту в кінці фіктивної тріщини були рівні нулеві, тобто $k_N(x_1) = k_M(x_1) = 0$. Алгоритм побудови розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь наведено [3, 6].

Проінтегрувавши розв'язок системи (15) формулу для знаходження розкриття тріщини в довільній її точці представимо у вигляді

$$\delta(x, \gamma) = [v(\alpha)] + \gamma [\theta_2(\alpha)].$$

Числовий аналіз задач. Для оболонки, навантаженої так, що на лінії тріщини $N_2(\alpha, 0) = N_2^0 = \text{const}$, $M_2^0 = 0$, проведено числовий аналіз задачі. Розкриття фронту тріщини та довжини пластичних зон обчислені при $R = 1,5 m$, $2h = 0,03 m$, $\nu = \nu_S = 0,3$, $K_1^0 = K_2^0 = 1,1$, та різних значеннях відношення E_S/E . На рис. 1 наведено графіки, що характеризують зміну відносного розкриття тріщини $\delta^* = \delta(x_0/R; 0)/(x_0\sigma_T)$, залежно від її довжини x_0 за різних значень відношення модулів пружності заповнювача та оболонки E_S/E .

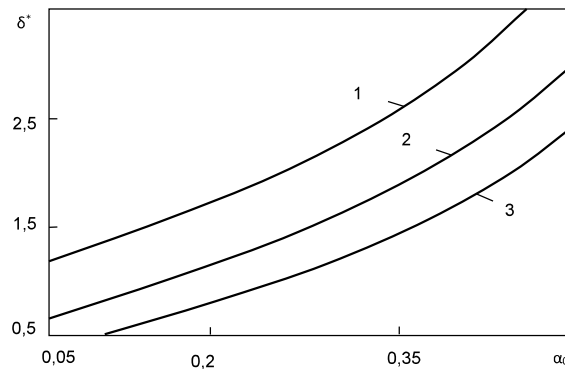


Рис. 1. Залежність відносного розкриття тріщини δ^* від довжини реальної тріщини та відношення модулів пружності E_S / E

Криві 1–3 відповідають значенням $E_S/E=0,1;0,5;1$. Як бачимо, зі збільшенням модуля пружності заповнювача її розкриття зменшується.

Для тих же значень відношення модулів пружності отримано залежність довжини пластичної зони від довжини тріщини, яка зростає при збільшенні відношення модулів пружності

Висновки. Одержані результати показують, що врахування пружного середовища приводить до збільшення несучої здатності оболонки, тобто до зменшення розкриття тріщини та розмірів зон пластичності. Врахування зміцнення приводить до зменшення розкриття тріщини та довжини пластичної зони. Отримані тут результати можна використати для знаходження наближеного значення збуреного напруженого стану в замкнутій циліндричній двохшаровій оболонці з тріщиною у верхньому шарі.

Список використаних джерел

1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
2. Клейн Г. К. Расчет подземных трубопроводов. – М.: Стройиздат, 1969. – 326 с.
3. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Вид-во «СПОЛОМ», 2003. – 320 с.
4. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
5. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1973. – 228 с.
6. I.S. Kostenko, Ya.M. Pelekh, T.M. Nykolyshyn, V.I. Karkuliovsky. Modelling and Method of Investigation of the Limiting Equilibrium of an Anisotropic Cylindrical Shell with Crack. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, MEMSTECH 2017. – Proceedings of 13th International Conference (Polyana, April 20–23, 2017). Lviv, 2017, pp. 146–150.

REFERENCES

1. Vlasov V. Z., Leont'yev N. N. Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii. – M.: Fizmatgiz, 1960. – 491 s. (in Russian)
2. Kleyn G. K. Raschet podzemnykh truboprovodov. – M.: Stroyizdat, 1969. – 326 s. (in Russian)
3. Kushnir R. M., Nikolishin M. M., Osadchuk V. A. Pruzhniy ta pruzhno-plastichniy granichniy stan obolonok z defektami. – L'viv: Vid-vo «SPOLOM», 2003. – 320 s. (in Ukrainian)
4. Grigolyuk E. I., Tolkachev V. M. Kontaknyye zadachi teorii plastin i obolochek. – M.: Mashinostroyeniye, 1980. – 411 s. (in Russian)
5. Grigorenko YA. M. Izotropnyye i anizotropnyye sloistyye obolochki vrashcheniya peremennoy zhestkosti. – K.: Nauk. dumka, 1973. – 228 s. (in Russian)
6. I.S. Kostenko, Ya.M. Pelekh, T.M. Nykolyshyn, V.I. Karkuliovskyy. Modelling and Method of Investigation of the Limiting Equilibrium of an Anisotropic Cylindrical Shell with Crack. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, MEMSTECH 2017. – Proceedings of 13th International Conference (Polyana, April 20–23, 2017). Lviv, 2017, pp. 146–150.

RESEARCH OF THE ELASTIC-PLASTIC CONDITION (STATE) OF A CYLINDRICAL SHELL WITH ELASTIC FILLING DEPENDED BY THE INTERNAL CRACK

Yulia Prokopovych¹, Yaroslav Pelekh², Iryna Kostenko², Bogdan Pakholok²

*¹Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
National Academy of Sciences of Ukraine*

²Lviv Polytechnic National University

Investigation of the elastically-plastic state of a closed cylindrical shell weakened by an internal fracture and connected to an elastic filler is reduced to the system of singular integral equations. The solution of the received system is constructed in conjunction with the elastically-plasticity conditions of thin shells, the conditions of stress limitations and the conditions of uniqueness of displacements. The influence of elastic-plastic medium, geometric and elastic-plastic parameters on the crack opening and the sizes of these zones are obtained.

*Стаття надійшла до редакції 22.02.2018
Received 22.02.2018*

the Ministry of Education and Science of Ukraine for improving the quality and professional training of specialists and introducing the concept of training specialists in a dual form of education. The practical recommendations for the improvement of the methodology of the educational process and the introduction of new curricula for the specialty "Publishing and Printing" have been presented.

UDC 539.375

**RESEARCH OF THE ELASTIC-PLASTIC CONDITION
OF A CYLINDRICAL SHELL WITH ELASTIC FILLING DEPENDED
BY THE INTERNAL FRACTURE**

Yulia Prokopovych¹, Yaroslav Pelekh², Iryna Kostenko², Bogdan Pakholok²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
National Academy of Sciences of Ukraine*

²*National University "Lviv Polytechnic" 12, S. Bandera St., Lviv, 79013, Ukraine,
Pelekh_Ya_M@ukr.net*

Research Methodology. The thin-walled elements of structures often interact with the environment in which they are located. They are modeled by shells, which act as an additional load as a reaction of the medium. Such calculation models are used, for example, during the research of pipelines, during the connection of shells by elastic bodies, an approximate calculation of multilayer pipelines with sections in the middle layers, which are used to change the trajectory of the propagating fracture.

Results. Numerical analysis of the studies problem has been carried out. The graphs representing the change in the relative opening of the fracture, depending on its length for different values of the ratio of the modulus of the elasticity of the filler and the shell, have been presented. It has been studied that with increasing the elastic modulus of the filler, its disclosure decreases. For the same values of the ratio of elastic modulus, the dependence of the length of the plastic zone on the length of the fracture has been obtained, which increases with increasing the ratio of elastic modulus.

Novelty. The works devoted to the research of thin-walled elements of structures that are in an elastic environment relate, as a rule, to shells without sharpener hubs. In this paper, the influence of the reaction of the elastic medium on the opening of the fractures in an elastic-plastic closed cylindrical shell has been studied.

Practical Significance. The obtained results can be used to find the approximate value of perturbed stressed condition in a closed cylindrical double-layer shell with a fracture in the upper layer.