

УДК 536.5+004.42

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ТВЕРДИХ ТІЛАХ

Я. М. Кавин, О. В. Шевчук

Українська академія друкарства
вул. Під Голоском, 19, м. Львів, 79020, Україна

Представлено визначення значень температурного поля в стаціонарному середовищі, зокрема як на поверхні твердого об'єкта так і в його поверхневих шарах. Визначення значення температурного поля основі на рішенні диференційних рівнянь теплопровідності. В процесі розв'язання диференційних рівнянь теплопровідності був введений коефіцієнт термічної дифузії. В результаті рішення диференційних рівнянь були отримані умови однозначності нестационарного теплового потоку, в якості фізичних та геометричних умов, а також початкових та граничних умов.

Ключові слова: диференціальне рівняння теплопровідності, енергетичний баланс, баланс ентальпії, коефіцієнт термічної дифузії a , коефіцієнти теплопровідності λ , рівняння Фур'є-Кірхгофа, умови Дирихлета, умови Неймана, умови Фуре.

Постановка проблеми. Оцінка зміни параметрів досліджуваної поверхні від процесу реєстрації їх в кореляції із змінами енергетичного потоку (тепла) підведеної до неї є можливою у варіанті тимчасової-змінної, а також монотонної по поверхні або шляхом приведення її градієнтів до досліджуваної поверхні. Відповідно вирішення задач поширення нестационарного теплового поля по поверхні твердих об'єктів, а також в їх поверхневих шарах на основі рішення диференційних рівнянь теплопровідності є досить важливим і актуальним для отримання термовізійної картини об'єкта.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Дослідження задач поширення теплового поля в нестационарних об'єктах на основі рішення диференційних рівнянь теплопровідності займаються такі вчені, як професор Прохоренко С., науковці Balageas D., Levesque P. та інші. Даний напрямок дослідження розвивається в університеті Львівська Політехніка (Україна), University of Bordeaux, Institut de mécanique et d'ingénierie (Франція), Uniwersytet Rzeszowski (Польща)

Мета. Визначення значення температурного поля в стаціонарному середовищі, зокрема як на поверхні твердого об'єкта так і в поверхневому його шарі, на основі рішення диференційного рівняння теплопровідності для отримання умов однозначності нестационарного теплового потоку.

Виклад основного матеріалу досліджень. Відправною точкою при визначенні значення температурного поля в твердому середовищі є диференціальне рівняння теплопровідності. Це рівняння отримується за допомогою енергетичного балансу для елементарного об'єму речовини [1].

Енергетичний баланс для твердого середовища при постійному тиску переходить в баланс Ентальпії

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} dV \cdot dt = \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV \cdot dt \quad (1)$$

Тепловий потік, який направлений вздовж осі x , проектується, як відстань dx :

$$q_x \cdot dy \cdot dz - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dV = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV \quad (2)$$

Об'єднуючи рівняння балансу Ентальпії, отримуємо:

$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV \cdot dt = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dV \cdot dt + q_v dV \cdot dt \quad (3)$$

Де об'ємна продуктивність тепла становить

$$q_v = \frac{d^2 Q_w}{dV \cdot dt}, \quad (4)$$

Де: Q_w визначається в якості джерела тепла

Теплопровідність через елементарний об'єм твердої речовини показана на рис. 1.

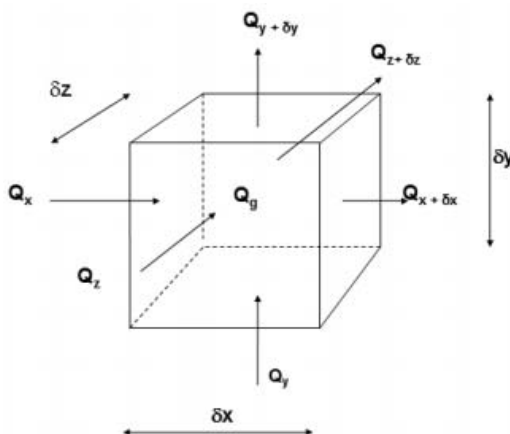


Рис 1 Теплопровідність через елементарний об'єм твердого тіла [1]

Рівняння Фур'є-Кірхгофа отримуємо шляхом введення коефіцієнта термічної дифузії .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{1}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{q_v}{\rho \cdot c_p} \quad (5)$$

При заданому постійному коефіцієнті теплопровідності λ і за відсутності внутрішніх теплових джерел виводиться відоме рівняння Фур'є

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \quad (6)$$

Рішення диференціального рівняння можливе шляхом визначення умов однозначності нестационарного теплового потоку в стаціонарних об'єктах, Умови однозначності визначаються, як фізичні умови, геометричні умови, а також граничні та початкові умови. Визначення граничних умов теплопровідності можна описати різними способами. Найважливіші програми мають чотири найбільш значущі методи, представлені нижче [2]:

- Граничні умови першого роду інакше умови Дирихлета. Умови, що регулюють розподіл температури по площі поверхні тіла в будь-який даний момент,
- Вторинні граничні умови інакше умови Неймана. Умови, в яких дається розподіл щільності потоку тепла по площі поверхні тіла в будь-який момент
- Граничні умови третього типу або умови Фур'є. Умови, які полягають на застосуванні коефіцієнта теплопередачі в зоні поверхні тіла в будь-який час, а також температури потоку, що оточує об'єкт.
- Граничні умови четвертого типу. Умови, в яких провідність тепла відбувається по обом краям поверхні ідеального контакту для тіл, що описуються законом Фур'є. Цей закон містить температурний баланс двох тіл по поверхні їх контакту, а також визначає щільність теплового потоку на обох поверхнях контактних тіл.

Висновки. Отримання досить точної термічної картини поширення температурного поля в нестационарному середовищі, зокрема в твердому об'єкті, можливе на основі рішення диференціального рівняння теплопровідності. Але його оптимальне рішення можливе шляхом визначення умов однозначності нестационарного теплового потоку підведеного до об'єкту в результаті чого на поверхні об'єкта індукуються і поширюються нестационарне теплове поле.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Balageas D., Levesque P.: Mines detection using the EMIR® method., Actes de la conférence QIRT 2002, 71-78, 2003.
2. Pat.UA 89421U Пат. UA 89421 U, МПК G 01 J 5/60. Прохоренко С., Шналь Т., Данкевич І., Возний М. Спосіб Створення Оптичного Контрасту для Тепло-візійних Приладів. Declaration Pat.(UA), заявник НУ „Львівська політехніка”. – № U 2013 105932; заявл. 02.09.2013; опубл. 25.04.2014, Бюл. № 8.
3. Капинос В.М., Ю. Л. Хрестовой Ю.Л., Численное решение нестационарной задачи теплопроводности в ортогональных системах координат для произвольных областей (№ 7509-86 от 31.X.1986)”, *ТВТ*, **25**:1 (1987), 201–202

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HEAT CONDUCTION IN SOLIDS

Yaroslav Kavyn, Oleksiy Shevchuk

*Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine*

The definition of the value of the temperature field in a stationary medium, in particular on the surface of a solid object and in its surface layers, is presented. Determination of the value of the temperature field based on the solution of differential equations of heat conductivity. In the process of solving the differential equations of heat conductivity, the coefficient of thermal diffusion was introduced. As a result of the solution of differential equations, the conditions for the uniqueness of the non-stationary heat flux, as physical and geometric conditions, as well as the initial and boundary conditions, were obtained.

Keywords: *differential equation of heat conduction, energy balance, enthalpy balance, thermal diffusion coefficient a , thermal conductivity coefficient λ , Fourier-Kirchhoff equation, Diryxllet condition, Neumann conditions, Fourier conditions.*

Стаття надійшла до редакції 22.02.2018

Received 22.02.2018

UDC 536.5+004.42

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HEAT CONDUCTION IN SOLIDS

Yaroslav Kavyn, Oleksiy Shevchuk

*Ukrainian Academy of Printing 19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
yroslav-kavin@ukr.net*

Research Methodology. It is in using the solution of differential heat equations for solving the problems of dissemination of a non-stationary thermal field on the object's surface, as well as in its surface layers.

Results. The methods for determining the thermal conductivity conditions have been presented, in particular: the conditions governing the temperature distribution over the surface area of the body at any given moment, the conditions in which the distribution of the heat flux density along the surface of the body at any moment is given, the conditions that is to apply the heat transfer coefficient in the body surface area at any time, as well as the temperature of the flow surrounding the object, the conditions in which the conductivity of heat occurs on both sides of the surface of the ideal contact for the bodies described by Fourier law.

Novelty. The determination of the uniqueness conditions of non-stationary heat flux in stationary objects on the basis of the solution of differential heat equations has been done.

Practical Significance. We have received a fairly accurate thermal picture of the dissemination of the temperature field in a non-stationary environment and, accordingly, carried out a detailed analysis of the problems of heat conduction and heat transfer.