УДК 519.65

РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ

П. С. Малачівський[1,2], Я. В, Пізюр[3], Р. П. Малачівський[3]

[1]Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна,
[2]Українська академія друкаства, Львів, вул. Під Голоском, 19,
[3]Національний університет "Львівська політехніка" вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

Запропоновано метод побудови рівномірного наближення раціональним виразом. Ідея алгоритму ґрунтується на побудові граничного середньостепеневого наближення. Для побудови середньостепеневих наближень використано метод найменших квадратів з двома змінними ваговими функціями. Запропоновано спосіб послідовного уточнення значень вагових функцій. Подано результати розв'язування тестового прикладу, який підтверджує ефективність використання запропонованого методу для рівномірного наближення раціональним виразом неперервних таблично заданих функцій однієї змінної.

Ключові слова: *наближення раціональним виразом, середньостепеневе наближення, рівномірне наближення, метод найменших квадратів.*

Постановка проблеми. Для обчислення параметрів рівномірного наближення раціональним виразом [1] поки що, на жаль, немає ефективних алгоритмів. Серед методів отримання рівномірного наближення раціональним виразом здебільшого застосовують зведення до послідовного розв'язування задачі лінійного програмування [2].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Приклади програмної реалізації подано в працях [3, 4]. Процедури MATLAB для обчислення параметрів мінімаксної апроксимації раціональним виразом для функцій однієї змінної подано в працях [5, 6]. У праці [7] подано перелік задач, розв'язування яких зводиться до побудови рівномірного наближення.

Мета статті. Розроблено метод побудови рівномірного наближення раціональним виразом. Він ґрунтується на методі описаному в працях [8, 9] і полягає в послідовній побудові середньостепеневих наближень. Середньостепеневі наближення раціональним виразом обчислюються за методом найменших квадратів з використанням двох змінних вагових функцій, значення яких уточнюються з врахуванням попередніх наближень. Значення параметрів раціонального наближення за методом найменших квадратів визначаємо з використанням схеми лінеаризації [10, 11]

Виклад основного матеріалу дослідження. Нехай неперервну функцію $f(x)$ задану на множині точок x_i $\left(i=\overline{0,n}\right)$ необхідно наблизити нескорочуваним раціональним виразом

$$R_{k,l}(a,b;x)=\frac{\sum_{i=0}^{k}a_i x^i}{\sum_{i=0}^{l-1}b_i x^i + x^l}, \tag{1}$$

де a_i, $i=\overline{0,k}$ і b_i, $i=\overline{0,l-1}$ – невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{k}\in A$, $A\subseteq R^k$, $\{b_i\}_{i=0}^{l-1}\in B$, $B\subseteq R^{l-1}$, R^m– m -вимірний векторний простір.

Вираз $R_{k,l}(a^*,b^*;x)$ називатимемо рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині точок x_i $(i=\overline{0,n})$ якщо він задовольняє умову

$$\max_{x_0\le x\le x_n}\left|f(x)-R_{k,l}(a^*,b^*;x)\right|=\min_{\substack{a\in A,\\ b\in B}}\max_{x_0\le x\le x_n}\left|f(x)-R_{k,l}(a,b;x)\right|. \tag{2}$$

Це означає, що необхідно знайти такі значення параметрів a^* та b^*, за яких найбільше за модулем відхилення значень виразу $R_{k,l}(a^*,b^*;x)$ від функції $f(x)$ на множині точок x_i $(i=\overline{0,n})$ досягає найменшого значення.

Середньостепеневе наближення функцій раціональним виразом. Нехай неперервну функцію $f(x)$ задану на множині точок x_i $(i=\overline{0,n})$ необхідно наблизити раціональним виразом (1). Для оцінки похибки наближення таблично-заданих функцій використовуємо норму евклідового простору E^p $(1\le p<\infty)$

$$\|\Delta\|_{E^p}=\left(\sum_{i=0}^{n}|\Delta(x_i)|^p\right)^{1/p}, \tag{3}$$

де $\Delta(x)=f(x)-R_{k,l}(a,b;x)$, $1\le p<\infty$. Граничне значення норми $\|\Delta\|_{E^p}$ при $p\to\infty$ відповідає нормі у просторі неперервних функцій $\|\Delta\|_C$ [1].

Опис методу. Якщо неперервне рівномірне наближення раціональним виразом $R_{k,l}(a,b;x)$ (1) для функції $f(x)$ на множині точок x_i $(i=\overline{0,n})$ існує, то побудова такого наближення ґрунтується на ідеї послідовного обчислення середньостепеневого наближення в просторі E^p при $p=2,3,4,\dots$. Для побудови середньостепеневого наближення функції $f(x)$ раціональним виразом на множині точок x_i $(i=\overline{0,n})$ в просторі E^p використовуємо метод найменших квадратів

$$\sum_{i=0}^{n}\rho_r(x_i)\left(f(x_i)-R_{k,l}(a,b;x_i)\right)^2\xrightarrow[a\in A,\ b\in B]{}\min,$$

$$r=0,1,\dots,p-2 \tag{4}$$

з послідовним уточненням значень вагової функції

$$\rho_0(x)=1,\quad \rho_r(x)=\prod_{i=1}^{r}|\Delta_i(x)|,\quad r=1,\dots,p-2,\quad p=2,3,4,\dots, \tag{5}$$

де $\Delta_s(x)=f(x)-R_{k,l,s-1}(a,b;x)$, $s=\overline{1,r}$, $R_{k,l,s}(a,b;x)$ – наближення за методом найменших квадратів функції $f(x)$ з ваговою функцією $\rho_s(x)$. Наближення $R_{k,l,s}(a,b;x)$ відповідає середньостепеневому наближенню степеня $p=s+2$.

Побудова за методом найменших квадратів наближення раціональним виразом – це нелінійна задача. Для побудови такого наближення застосовано лінеаризацію з використанням змінної вагової функції [10, 11]. Метод лінеаризації [10, 11] полягає в ітераційному уточненні наближення раціональним виразом $R_{k,l}(a,b;x)$. Отже, відповідно до цього методу для кожного фіксованого значення p розв'язуємо задачу середньостепеневого наближення функції $f(x)$ на множині точок x_i $\left(i=\overline{0,n}\right)$ за методом найменших квадратів

$$\sum_{i=0}^{n}\rho_r(x_i)\upsilon_{r,t}(x_i)\left(\Phi_{r,t}(a,b;x_i)\right)^2 \xrightarrow[a\in A,\ b\in B]{} \min,\ r=p-2,\quad t=0,1,\ \dots\ , \tag{6}$$

де

$$\Phi_{r,t}(a,b;x)=f(x)\left(\sum_{i=0}^{l-1}b_{i,r,t}x^i+x^l\right)-\sum_{i=0}^{k}a_{i,r,t}x^i\ . \tag{7}$$

Значення вагової функції $\upsilon_{r,t}(x)$ обчислюємо так

$$\upsilon_{r,t}(x)=\begin{cases}1, & \text{ÿêùî}\quad r=0,\ t=1,\\ \left(\sum\limits_{i=0}^{l-1}b_{i,r,t-1}x^i+x^l\right)^{-2}, & \text{ÿêùî}\quad t>0.\end{cases} \tag{8}$$

Уточнення наближення раціональним виразом (1) за методом найменших квадратів (6)-(8) можна контролювати точністю ε_1 виконання умови

$$\left|\eta_{r,t-1}-\eta_{r,t}\right|\le\varepsilon_1\eta_{r,t}, \tag{9}$$

де

$$\eta_{r,t}=\sum_{i=0}^{n}\rho_r(x_i)\upsilon_{r,t}(x_i)\left(\Phi_{r,t}(a,b;x_i)\right)^2. \tag{10}$$

Значення $\varepsilon_1=0.003$ забезпечує збіжність двох-трьох значущих цифр суми квадратів відхилень (10) на множині точок задання функції. Виконання умови (9) означає, що середньостепеневе наближення степеня $p=r+2$ раціональним виразом $R_{k,l,r}(a,b;x)$ обчислено з точністю ε_1. Параметри наближення $R_{k,l,r}(a,b;x)$ такі

$$a_{j,r}=a_{j,r,t}\ \left(j=\overline{0,k}\right),\ \text{а}\ \ b_{j,r}=b_{j,r,t}\ \left(j=\overline{0,l-1}\right). \tag{11}$$

Отже, побудова рівномірного наближення раціональним виразом (1) полягає в застосуванні двох ітераційних процесів. Вкладених ітерацій (6)-(8) і зовнішніх (4)-(5). Завершення ітерацій (4)-(5) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε

$$\mu_{r-1}-\mu_r\le\varepsilon\mu_r, \tag{12}$$

де

$$\mu_r=\max_{x_0\le x\le x_n}\left|f(x)-R_{k,l,r}(a,b;x)\right|. \tag{13}$$

Під час розв'язування тестових прикладів досягнення точності $\varepsilon=0.003$ спостерігалося за вісім-дванадцять ітерацій (4)-(5). Ця точність забезпечувала збіжність двох-трьох значущих цифр похибки рівномірного наближення раціональним виразом. При цьому точність $\varepsilon_1 = 0.003$, визначення проміжних наближень раціональним виразом, досягалась за три-чотири внутрішні ітерації (6)-(8). Якщо для $r \geq 1$ значення вагової функції $\upsilon_{r,0}(x)$ не змінювати – залишити рівними попереднім $\upsilon_{r-1,t}(x)$, то для уточнення раціонального виразу достатньо було лише двох ітерацій (6)-(8).

Приклад. Знайдемо рівномірне наближення функції $y(x) = e^x$ заданої в точках x_i, $i = \overline{0,30}$, де $x_i = -1 + 0.1i$, раціональним виразом $R_{2,1}(a,b;x)$.

З використанням запропонованого методу при $\varepsilon = 0.003$ за вісім ітерацій (6) з ваговою функцією (7) для функції $y(x)$ отримано раціональний вираз

$$R_{2,1}(a,b;x) = \frac{1.043227312x^2 + 3.029780712x + 3.863602586}{3.903847747 - x}, \qquad (14)$$

який з врахуванням коригуючої поправки $\overline{a}_0 = 0.000010784$ забезпечує абсолютну похибку наближення – 0.015695232. В процесі обчислення рівномірного наближення функції $y(x)$ похибка наближення на ітераціях (6) набувала таких значень:

0.023871778, 0.016934248, 0.01628043, 0.016008242,
0.015879723, 0.015801285, 0.015747203, 0.015706016.

Рівномірне наближення функції $y(x)$ раціональним виразом $R_{2,1}(a,b;x)$, отримане за ітераційною схемою Ремеза з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле-Пуссена [12] забезпечує похибку апроксимації – 0.0155. Перевищення похибки наближення раціональним виразом (14) у порівнянні з похибкою рівномірного наближення, отриманого за схемою Ремеза, дорівнює – 0.000195232. Похибка наближення раціональним виразом (14) перевищує на 1.26% похибку рівномірного наближення, отриманого за схемою Ремеза.

Криву похибки апроксимації раціональним виразом (24) відображено на рис. 1.

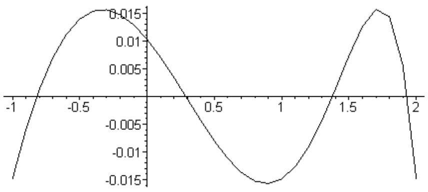

Рис. 1. Крива похибки апроксимації функції $y(x)$ раціональним виразом (14)

Подана на рисунку крива похибки наближення раціональним виразом (14) відповідає характеристичній властивості рівномірного наближення [12] – має п'ять екстремальних точок, в яких досягається найбільше за модулем відхилення, значення модулів цих відхилень збігаються (в межах заданої точності) і знак відхилень у цих точках чергується. Ці екстремальні точки збігаються з точками альтернансу, отриманими при наближенні функції $y(x)$ за схемою Ремеза з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле-Пуссена [12].

Висновок. Запропонований метод побудови рівномірного наближення раціональним виразом неперервних таблично-заданих функцій забезпечує можливість обчислення наближення з необхідною точністю. Метод простий для реалізації, надійний і ефективний. Результати розв'язування тестових прикладів підтверджують досить швидку збіжність запропонованого методу.

Ідея запропонованого методу допускає його використання для апроксимації раціональним виразом неперервних таблично-заданих функцій багатьох змінних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения: – Пер. с немец. Москва: Наука, 1978. – 272 с.
2. Barrodale I., Powell M. J. D., Robertst F. D. K. The differential correction algorithm for rational l_∞-approximation // SIAM J. NUMER. ANAL. - Vol. 9, – No. 3, – 1972. – P. 493-504.
3. Каленчук-Порханова А. О., Вакал Л. П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2007. – № 6. – С. 141-148.
4. Петрак Л. В. Приближение функций многих переменных рациональными дробьями / Программы оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. Вып. 6. – С. 130–144.
5. Filip S.-I., Nakatsukasa Y., Trefethen L. N., Beckermann B. Rational minimax approximation via adaptive barycentric representations // https://arxiv.org/pdf/1705.10132. – 2017. Pp. 1-29.
6. Nakatsukasa Y., Sete `O., Trefethen L. N. The AAA algorithm for rational approximation // SIAM J. SCI. COMPUT. 2018 Vol. 40, No. 3, pp. A1494–A1522.
7. Bultheel A., DeMoor B. Rational approximation in linear systems and control // Journal of Computational and Applied Mathematics. – Volume 121, Issues 1–2, 2000. – Pp. 355-378.
8. Malachivskyy P. S., Matviychuk Y. N., Pizyur Y. V., Malachivskyi R. P. Uniform Approximation of Functions of Two Variables / Cybernetics and Systems Analysis, No. 3, May–June, 2017, pp. 111–116.
9. Малачівський П. С., Пізюр Я. В., Малачівський Р. П. Обчислення чебишовського наближення функцій багатьох змінних // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: зб. праць V наук.-техн. конф., Львів, 26-28 вересня 2018 р. // Львів: ФМІ НАНУ, – 2018. – С. 179-180.
10. Калиткин Н. Н. Численные методы. – Москва: Наука, 1978. – 512 с.
11. Малачівський П. С., Пізюр Я. В. Розв'язування задач в середовищі Maple – Львів: Видавництво: "РАСТР – 7". – 2016. – 282 с.
12. Малачівський П. С., Скопецький В. В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. – 270 с.

REFERENCES

1. Kollatz L., Krabs W. (1978) «Teoriya priblizheniy. Chebyshevskiye priblizheniya i ikh ptilozheniya». Moskva: Nauka. – 272 p. (in Russian)
2. Barrodale I., Powell M. J. D., Robertst F. D. K. The differential correction algorithm for rational l_∞-approximation // SIAM J. NUMER. ANAL. - Vol. 9, – No. 3, – 1972. – P. 493-504. (in English)
3. Kalenchuk-Porkhanova A. O., Vakal L. P. (2007) «Pobudova naikraschykh rivnomirnykh nablyzhen funkciy bahatyokh zminnkh» // Compyuterni zasoby, merezhi ta systemy. – № 6. – pp. 141-148. (in Ukrainian)
4. Petrak L. V. (1975) «Priblizheniye funkciy mnogikh peremennykh racionalnymi drobyami» / Programmy optimizacii. – Sverdlovsk: UNC AN SSSR, Vol. 6. – pp. 130–144. (in Russian)
5. Filip S.-I., Nakatsukasa Y., Trefethen L. N., Beckermann B. Rational minimax approximation via adaptive barycentric representations // https://arxiv.org/pdf/1705.10132. – 2017. pp. 1-29. (in English)
6. Nakatsukasa Y., Sete `O., Trefethen L. N. The AAA algorithm for rational approximation // SIAM J. SCI. COMPUT. 2018 Vol. 40, No. 3, pp. A1494–A1522. (in English)
7. Bultheel A., DeMoor B. Rational approximation in linear systems and control // Journal of Computational and Applied Mathematics. – Volume 121, Issues 1–2, 2000. – pp. 355-378. (in English)
8. Malachivskyy P. S., Matviychuk Y. N., Pizyur Y. V., Malachivskyi R. P. Uniform Approximation of Functions of Two Variables / Cybernetics and Systems Analysis, No. 3, May–June, 2017, pp. 111–116. (in English)
9. Malachivskyy P. S., Pizyur Y. V., Malachivskyi R. P. (2018) «Obchyslennya chebyshovskoho nablyzhennia funkciy bahatiokh zminnykh» // Obchysliuvalni metody i systemy peretvorennia informacii: zb. prac' V nauk.-teckn. konf., Lviv, 26-28 veresnia 2018 p. // Lviv: FMI NANU. – pp. 179-180. (in Ukrainian)
10. Kalitkin N. N. (1978) «Chislennyye metody». – Moskva: Nauka. – 512 p. (in Russian)
11. Malachivskyy P. S., Pizyur Y. V. (2016) «Rozvyazuvannia zadach v seredovyshhi Maple» – Lviv: Vydavnyctvo: "RASTR – 7". – 282 p. (in Ukrainian)
12. Malachivskyy P. S., Skopeckyy V. V. (2013) «Neperervne i hladke minimaksne splayn-nablyzhennia». Kyiv: Nauk. dumka. – 270 p. (in Ukrainian)

UDC 519.65

UNIFORM APPROXIMATION BY RATIONAL EXPRESSION

P. S. Malachivskyy [1,2], Ya. V, Pizyur[3], R. P. Malachivskyy [3]

[1]Center of Mathematical Modeling, Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 15, Dudayev St., Lviv, 79005, Ukraine
Petro.Malachivskyy@gmail.com

[2]Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
[3]National University "Lviv Polytecnic",

12, S.Bandery St., Lviv, 79013, Ukraine
pizyur@yahoo.com romanmalachivsky@gmail.com

The method of construction of uniform approximation by rational expression has been presented. The idea of the method is based on the construction of the power-average approximation as boundary approximation in norm under . It consists in constructing a boundary power-average approximation. The method of least squares with two variable weight functions is used to construct power-average approximations. First weight function provides the construction of a power-average approximation, and the second – specification the parameters linearized of rational expression. The method of successive refinement of weight functions has been suggested. The results of solving a test example, which confirms the effectiveness of the suggested method of the uniform approximation by the rational expression of continuous table-defined functions of one variable, have been presented.

Keywords: *approximation by rational expression, power-average approximation, uniform approximation, least squares method.*

Стаття надійшла до редакції 22.02.2018
Received 22.02.2018

positions and the possibility of performing identical transformations of the ordering have been proved.

Novelty. New, in addition to the methodology, is the created positional logic, which contains new operations α-, β-, αβ-conjuncture (disjunction) and positional inverting, which take into account the positions of their constituents.

Practical Significance. Practical significance of the work lies in the analytical description of ordering, in particular algorithms.

UDC 519.65

UNIFORM APPROXIMATION BY RATIONAL EXPRESSION

P. S. Malachivskyy[1,2], Ya. V, Pizyur[3], R. P. Malachivskyy[3]

[1]*Center of Mathematical Modeling, Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 15, Dudayev St. Lviv 79005, Ukraine"Petro.Malachivskyy@gmail.com*

[2]*Ukrainian Academy of Printing, 19, Pid Holoskom St., Lvivв, 79020, Ukraine*
[3]*National University "Lviv Polytecnic", 12, S.Bandera St., Lviv, 79013, Ukraine*
pizyur@yahoo.com
romanmalachivsky@gmail.com

Research Methodology. The research of the method of calculating the parameters of uniform approximation by rational expression is based on the application of methods of mathematical analysis and the theory of approximation of functions.

Results. The method of calculating the parameters of uniform approximation by a rational expression has been developed.

Novelty. The algorithm of uniform approximation by rational expression has been described. The idea of the method is based on the construction of the power-average approximation as boundary approximation in norm under . It consists in constructing a boundary power-average approximation. The method of least squares with two variable weight functions is used to construct power-average approximations. First weight function provides the construction of a power-average approximation, and the second – specification the parameters linearized of rational expression. The method of successive refinement of weight functions has been suggested.

Practical Significance. An effective method for determining the parameters of uniform approximation by a rational expression has been suggested. Approximation of rational expression is used in constructing models of functional converters, modeling of control systems.