УДК 512.64

УМОВИ РОЗКЛАДУ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ

Р.В.Коляда, О.М.Мельник

Українська академія друкарства
вул. Під Голоском, 19, м.Львів, 79020, Україна

Досліджено умови розкладу матричного многочлена в добуток лінійних множників.

Ключові слова: *матричний многочлен, лінійний множник, елементарний дільник.*

Нехай

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = \left\| \sum a_{ij}^{(s)}(x) \right\|_{i,\,j=1}^{n} - \qquad (1)$$

регулярний ($\det A_0 \neq 0$) матричний многочлен, A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) − $n \times n$-матриці над довільним полем **P**,

$$\Delta(x) = \det A(x) = p_0x^{mn} + p_1x^{mn-1} + \ldots + p_{mn-1}x + p_{mn} - \qquad (2)$$

його характеристичний многочлен.

Властивості коефіцієнтів характеристичного многочлена $\Delta(x)$ досліджено в роботі [1]. В даній роботі досліджено умови розкладу матричного многочлена в добуток лінійних множників, враховуючи коефіцієнти характеристичного многочлена, а також кількість його елементарних дільників [2].

Твердження. Матричний многочлен (1) має кратні характеристичні корені тоді і тільки тоді, якщо дорівнює нулю визначник

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_{mn} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_0 & p_1 & \ldots & p_{mn-1} & p_{mn} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_0 & p_1 & \ldots & p_{mn} \\ mnp_0 & (mn-1)p_1 & (mn-2)p_2 & \ldots & p_{mn-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & mnp_0 & (mn-1)p_1 & \ldots & 2p_{mn-2} & p_{mn-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & mnp_0 & (mn-1)p_1 & \ldots & p_{mn-1} \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

де

$$p_k = \sum_{s_1+\ldots+s_n=mn-k} \begin{vmatrix} a_{11}^{(s_1)} & \ldots & a_{1n}^{(s_n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^{(s_1)} & \ldots & a_{nn}^{(s_n)} \end{vmatrix}, \; k = 0, 1, \ldots, mn. \qquad (4)$$

Доведення.Достатність. Нехай визначник (3) дорівнює нулю. Тоді многочлени $\Delta(x) = p_0x^{mn} + p_1x^{mn-1} + \ldots + p_{mn}$ і $\Delta'(x) = mnp_0x^{mn-1} + (mn-1)p_1x^{mn-2} + \ldots + p_{mn-1}$

або мають спільний дільник, або коефіцієнти p_0 і mnp_0 при старших степенях змінної x дорівнюють нулю. Оскільки останнє є неможливим завдяки регулярності матричного многочлена $A(x)$, то многочлени $\Delta(x)$ і $\Delta'(x)$ мають спільний множник, тому $A(x)$ має кратні характеристичні корені, причому коефіцієнти $p_k, k = 0, 1, \ldots, mn$ задовольняють умові (4).

Необхідність. Якщо матричний многочлен $A(x)$ має кратні характеристичні корені, то многочлени $\Delta(x)$ і $\Delta'(x)$ мають спільний дільник, відмінний від константи. Тоді визначник (3) дорівнює нулю.

Теорема 1. Регулярний матричний многочлен (1) над алгебраїчно замкненим полем розкладається в добуток лінійних регулярних множників $A(x) = A_0(Ex - B_1)(Ex = B_2)\ldots(Ex - B_m)$, якщо не дорівнює нулю визначник

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_0 & & p_{mn} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_0 & \ldots & p_{mn} \\ (mn-1)mnp_0 & (mn-1)(mn-2)p_1 & \ldots & 2p_{mn-2} & \ldots & 0 \\ 0 & (mn-1)mnp_0 & \ldots & 6p_{mn-3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (mn-1)mnp_0 & \ldots & 2p_{mn-2} \end{vmatrix},$$

де коефіцієнти p_k, $k = 0, 1, \ldots, mn$ характеристичного многочлена визначаються за формулою (4).

Доведення. З умови теореми випливає взаємна простота многочленів $\Delta(x)$ і $\Delta''(x)$, тобто $\left(\Delta(x), \Delta''(x)\right) = 1$. Для завершення доведення теореми досить застосувати теорему 2 [3].

Якщо матричний многочлен (1) розглядається над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, то в твердженні та теоремі 1 коефіцієнти p_k, $k = 0, 1, \ldots, mn$ знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} &\frac{p_1}{p_0} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{mn}) = SpA_1, \\ &\frac{p_2}{p_0} = \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_1\alpha_{mn} + \ldots + \alpha_{mn-1}\alpha_{mn}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{p_{mn}}{p_0} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{mn} = \det A_m, \end{aligned} \qquad (5)$$

де $\Delta(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{mn})$, а SpA_1 – слід матриці.

Якщо $m = 2$, а $n = 1$, то з формул (4) випливають відомі формули Вієта для скалярного квадратного тричлена.

Відомо [4], що матричний многочлен (1) розкладається в добуток лінійних множників, якщо кратність його характеристичних коренів не перевищує два. Виявляється, що матричний многочлен розкладеться в добуток лінійних множників, якщо кратність окремих характеристичних коренів перевищує два і це тісно пов'язано з кількістю елементарних дільників.

Нехай $A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ − унітальний [5-7] матричний многочлен, $\Delta(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_1}\ldots(x-\alpha_s)^{k_s}$ − його характеристичний многочлен ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ − попарно різні характеристичні корені) і, нехай t_i − кількість елементарних дільників, що відповідають кореню $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, s$. Тоді $rangA(\alpha_i) = n - t_i$.

Теорема 2. Якщо виконується нерівність $\sum_{i=1}^{s} t_i \geq (n-1)m$, то матричний многочлен $A(x)$ розкладається в добуток лінійних унітальних множників.

Доведення. Для характеристичного кореня α_1 існує числова неособлива матриця S_1, що

$$S_1A(x) = \begin{Vmatrix} (x-\alpha_1)b_{11}(x)\ldots(x-\alpha_1)b_{1n}(x) \\ A_{n-1}(x) \end{Vmatrix}.$$

Нехай через p кроків отримаємо матрицю

$$S_p\ldots S_1A(x) = \begin{Vmatrix} diag(x-\alpha_1, \ldots, x-\alpha_p) & B_p(x) \\ A_{n-p}(x) & \end{Vmatrix}$$

і для деякого характеристичного кореня α_{p+1} маємо

$$rang\begin{Vmatrix} diag(\alpha_{p+1}-\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}-\alpha_p) & B_p(\alpha_{p+1}) \end{Vmatrix} = r > p - t_{p+1}.$$

Це означає, що в матриці $\begin{Vmatrix} diag(\alpha_{p+1}-\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}-\alpha_p) & B_p(\alpha_{p+1}) \end{Vmatrix}$ є r лінійно незалежних рядків, які разом з рядками матриці $A_{n-p}(x)$ утворюють лінійно незалежну систему. Тому існує така числова неособлива матриця S_{p+1}, що

$$S_{p+1}\ldots S_1A(x) = \begin{Vmatrix} diag(x-\alpha_1, \ldots, x-\alpha_{p+1}) & B_{p+1}(x) \\ A_{n-p-1}(x) & \end{Vmatrix}.$$

Через скінченне число кроків прийдемо до ситуації

$$S_q\ldots S_1A(x) = \begin{Vmatrix} diag(x-\alpha_1, \ldots, x-\alpha_q) & B_q(x) \\ A_{n-q}(x) & \end{Vmatrix},$$

де

$$rang\ diag(\alpha_i-\alpha_1, \ldots, \alpha_i-\alpha_q)\ B_q(\alpha_i) = p - t_i$$

для всіх коренів $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, l$. Звідси випливає, що всі елементарні дільники матриці $A(x)$ є елементарними дільниками матриці

$$\left\| diag(\alpha_i - \alpha_1, \ldots, \alpha_i - \alpha_q) \;\; B_q(\alpha_i) \right\|.$$

Нехай $d_q(x)$ найбільший спільний дільник мінорів порядку q цієї матриці. Тоді виконується нерівність

$$sq \geq \deg d_q(x) \geq \sum_{i=1}^{l} t_i \, . \tag{6}$$

Нехай виконується нерівність $\sum_{i=1}^{l} t_i > (n-1)s$. З огляду на нерівність (6) отримаємо $q = n$. Нехай існує такий характеристичний корінь α_1 матриці $A(x)$, що $k_1 > t_1$, тобто не всі елементарні дільники, що відповідають кореню α_1 лінійні. Тоді існує числова неособлива матриця Q_1, що

$$Q_1 A(x) = (Ex - D)\; C_1(x),$$

де $D_1 = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_{n-t_1}),\;\; \beta_j \in \{\alpha_2,\; \ldots, \alpha_l\},\;\; j = 1, 2, \ldots, n - t_1$.

Тепер для регулярної многочленної матриці $C_1(x)$ степеня $s-1$ виконується нерівність $\sum_{i=1}^{l} t_i \geq (n-1)(s-1)$. Продовжуючи аналогічні міркування для матриці $C_1(x)$, не більше ніж через $s-1$ кроків отримаємо розклад матриці $A(x)$ в добуток лінійних регулярних множників.

Якщо всі елементарні дільники матриці $A(x)$ лінійні, то $A(x)$ є матрицею простої структури [8] і розкладається в добуток лінійних регулярних множників.

Доведення теореми завершується дослідженням випадку виконання рівності $\sum_{i=1}^{l} t_i = (n-1)s$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Коляда Р. В. О некоторых свойствах коэффициентов характеристического многочлена полиномиальной матрицы //Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. − К: Наук. думка, 1989. − С. 103-106.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. − 4-е изд. − М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. − 552 с.
3. Казимирский П. С. Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители / П.С. Казимирський, В.М. Петричкович // Матем. методы и физ.-мех. поля. – 1978. − Вып. 8. − С. 3-9.
4. Петричкович В. М. О линейных делителях и приводимости многочленных матриц //Укр. матем. журн. − 1984. − Т. 36, № 2. − С. 195-200.

5. Мельник О. М. Подібність матричних многочленів //Доповіді АН УРСР. Серія А. − 1984, № 5. − С. 11-14.
6. Мельник О.М. Строение унитальных матричных многочленов с попарно различными характе-ристическими корнями //Український математичний журнал /Інститут математики АН України, Київ, 1993, т. 45, № 1. − С. 69-76.
7. O. Mel`nyk, R. Kolyada. Semiscalar equivalence of polynomial matrices // International Meeting on Matrix Analysis and Applications Dec 14-16 (Sunday - Tuesday), 2003. – Nova Southeastern University, Fort Lauderdale, Florida, USA. – p. 8-9.
8. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.

REFERENCES

1. Koljada R. V. (1989). O nekotoryh svojstvah kojefficientov harakteristicheskogo mnogochlena polinomial'noj matricy //Metody issledovanija differencial'nyh i integral'nyh operatorov. − K: Nauk. dumka − S. 103-106. (in Russian)
2. Gantmaher F. R. (1988). Teorija matric. − 4-e izd. − M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. − 552 s. (in Russian)
3. Kazimirskij P. S., Petrichkovich V. M. (1978). Razlozhimost' polinomial'nyh matric na linejnye mnozhiteli //Matem. metody i fiz.-meh. polja. –Vyp. 8. − S. 3-9. (in Russian)
4. Petrichkovich V. M. (1984). O linejnyh deliteljah i privodimosti mnogochlennyh matric //Ukr. matem. zhurn. − T. 36, № 2. − S. 195-200. (in Russian)
5. Melnyk O. M. (1984). Podibnist matrychnykh mnohochleniv //Dopovidi AN URSR. Seriia A. − № 5. − S. 11-14. (in Ukrainian)
6. Mel'nik O.M. (1993). Stroenie unital'nyh matrichnyh mnogochlenov s poparno razlichnymi harakte-risticheskimi kornjami //Ukraïns'kij matematichnij zhurnal /Institut matematiki AN Ukraïni, Kiïv, t. 45, № 1. − S. 69-76. (in Russian)
7. O. Mel`nyk, R. Kolyada. (2003). Semiscalar equivalence of polynomial matrices //International Meeting on Matrix Analysis and Applications Dec 14-16 (Sunday - Tuesday),2003– Nova Southeastern University, Fort Lauderdale, Florida, USA. – p. 8-9.(in English)
8. Kazimirskyi P. S. (1981). Rozklad matrychnykh mnohochleniv na mnozhnyky. – K.: Nauk. dumka– 224 s. (in Ukrainian)

UDC 512.64

DECOMPOSABILITY CONDITIONS INTO LINEAR FACTORS FOR MATRIX POLYNOMIALS

P. V. Kolyada, O. M. Melnyk

Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
rostyslavakolyada@gmail.com, melnykorest@gmail.com

The conditions under which a matrix polynomial admits decomposition into a product of linear factors have been researched.

Keywords: *matrix polynomial, linear factor, elementary divisor.*

Стаття надійшла до редакції 22.02.2018
Received 22.02.2018

UDC 512.64

DECOMPOSABILITY CONDITIONS INTO LINEAR FACTORS FOR MATRIX POLYNOMIALS

P. V. Kolyada, O. M. Melnyk
Ukrainian Academy of Printing, 19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
rostyslavakolyada@gmail.com, melnykorest@gmail.com

Research Methodology. We have used a method based on studying and research properties of coefficients of a characteristic polynomial, as well as elementary divisors of a regular matrix polynomial.

Results. We have studied the decomposability conditions for a regular matrix polynomial into a product linear factors over an arbitrary, possibly algebraically closed field, taking into consideration the coefficients of the characteristic polynomial of a matrix polynomial and the number of elementary divisors of a matrix polynomial.

Novelty. To establish the conditions of decomposability of a matrix polynomial into linear factors we have used a new method which involves using the properties of coefficients of a characteristic polynomial and a number of elementary divisors.

Practical Significance. The scientific results are theoretical in nature, and could be used in studying problems in linear algebra.

UDC 629.3.083

UNIFIED ALGORITHM OF INTERNAL COMBUSTION ENGINE DIAGNOSTICS WITH ELECTRONIC CONTROL SYSTEM

R.M. Modla[1], O.O. Ivanyuk [1], V.V. Senkiv [1], V.M. Brytkovsky[1], O.M. Sorochinsky[2]
[1]*National University "Lviv Polytechnic" 12, S. Bandera St., Lviv, 79013, Ukraine*

[2]*Ukrainian Academy of Printing, 19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine*

Research Methodology. The method of determining the correlation between the parameters of the studied and the basic signals in diagnosing the mechanical part of the engine and the ignition system has been used. This technique allows you to reduce the time of diagnosis and increase its reliability. The use of pressure sensors in engine cylinders, crankcase and exhaust gases provides an independent diagnosis of the mechanical part of the engine.

Results. A unified algorithm for diagnosing an internal combustion engine with an independent computer diagnostics of engine mechanics has been developed based on the method of determining the correlation between the parameters of the studied and the basic signals. Unifying the diagnostic process reduces the time consuming and increases the reliability and completeness of the diagnosis.