

УДК 519.65

**ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ  
НЕЛІНІЙНОЇ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНОЇ СИСТЕМИ  
ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ СПОТВОРЕНЬ  
ВИХІДНОГО ГАРМОНІЙНОГО СИГНАЛУ**

І. М. Заячук

*Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача  
НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна,*

*Для спрощення процесу проектування нелінійних електротехнічних систем в часовій області встановлено взаємозв'язок між обраним критерієм, що характеризує спотворення вихідного гармонійного сигналу (коефіцієнт гармонік) з параметрами системи. Запропоновано ефективну методику оптимізації спотворень вихідного гармонійного сигналу для існуючої моделі нелінійної електротехнічної системи в часовій області. Аналітичним шляхом сформовано цільову функцію і крайові умови. Для розв'язку оптимізаційної задачі запропоновано використати існуючі методи нелінійного програмування.*

**Ключові слова:** *нелінійні електротехнічні системи, гармонійний періодичний сигнал, спотворення гармонійного сигналу, оптимізація спотворень, цільова функція, коефіцієнт гармонік, коефіцієнт підсилення, електричне коло.*

**Постановка проблеми.** Математичну модель нелінійної електротехнічної системи в часовій області можна представити у вигляді системи нелінійних рівнянь [1]. Для оптимізації спотворень вихідного гармонійного сигналу необхідно аналітично встановити їх взаємозв'язок з параметрами цієї системи і сформулювати задачу мінімізації цих спотворень у вигляді цільової функції і крайових умов. Далі існуючими методами оптимізації знайти оптимальне значення критерію, який описує обране спотворення. Для розв'язку такої задачі доцільно використовувати методи нелінійного програмування [2].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Критерієм спотворення вихідного гармонійного сигналу нелінійної електротехнічної системи в часовій області обрано коефіцієнт гармонік [3]. У більшості випадків в процесі розрахунку коефіцієнта гармонік використовуються результати роботи лінеаризованої нелінійної електротехнічної системи. За отриманими результатами значення розрахованого коефіцієнта гармонік коригують, враховуючи незначні нелінійності. Для такого випадку використовують різні варіанти методу малого параметра, гармонійного балансу, метод рядів Вольєрра [4,5,6]. Зі зростанням ступеня нелінійності електротехнічної системи використання цих методів погіршує їх збіжність і ускладнює процес дослідження. Тому для процесу оптимізації коефіцієнта гармонік доцільно аналітичним шляхом знайти взаємозв'язок коефіцієнта гармонік з параметрами нелінійної електротехнічної системи, а опісля, сфор-

мувавши цільову функцію і відповідні обмеження, оптимізувати цей параметр. Окрім того було враховано результати досліджень для нелінійних безреактивних електротехнічних систем, які описуються системою нелінійних алгебраїчних рівнянь і методику оптимізації таких систем за коефіцієнтом гармонік [7, 8].

Мета статті. Максимально спростити процес оптимізації спотворень вихідного гармонійного сигналу для заданої моделі нелінійної електротехнічної системи в часовій області. Аналітично сформулювати цільову функцію і крайові умови. Це потрібно для того, щоб не оцінювати точність і поріг чутливості в процесі розрахунку коефіцієнта гармонік, як це описано в роботі [9,10].

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Нехай досліджувана електротехнічна система описується системою нелінійних рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned} Ax + f(x) &= b^{(0)} + ay_{\text{вх}}(t), \\ y_{\text{вих}} &= c^T x + gy_{\text{вх}} + W^{(0)}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $A$  – квадратна матриця розміром  $(n \times n)$ ,  $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ ;  $b^{(0)}$ ,  $a$ ,  $c^T$  –  $n$  – мірні вектори,  $y_{\text{вх}}(t)$ ,  $y_{\text{вих}}(t)$ ,  $g$ ,  $W^{(0)}$  – скаляри.

Гармонійний періодичний сигнал з амплітудою  $Y$ , який подається на вхід системи представимо у вигляді  $y_{\text{вх}}(t) = Y \cos t$ . Критерієм спотворень вихідного гармонійного сигналу  $y_{\text{вих}}(t)$  виберемо коефіцієнт гармонік.

Необхідно визначити параметри електротехнічної системи за яких коефіцієнт гармонік сигналу  $y_{\text{вих}}(t)$  досягає мінімального значення з врахуванням заданих обмежень. За можливі обмеження можна прийняти:

коефіцієнт підсилення  $K_0 \cong Y_{\text{вих}}/Y$ , де  $Y_{\text{вих}}$  – амплітуда першої гармоніки вихідного сигналу;

потужність  $P$ , яку споживає система, якщо  $y_{\text{вх}} = 0$ .

Розв'язок системи рівнянь (1) для  $y_{\text{вх}} = 0$  представимо як  $x^{(0)}$  і  $y_{\text{вих}}^{(0)}$ .

Окрім того введемо нову змінну  $z = x - x^{(0)}$

і  $v = y_{\text{вих}} - y_{\text{вих}}^{(0)}$ . В результаті систему рівнянь (1) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} Az + Ax^{(0)} + [f(x^{(0)} + z) - f(x^{(0)})] + f(x^{(0)}) &= b^{(0)} + ay_{\text{вх}}, \\ y_{\text{вих}}^{(0)} + v &= c^T(x^{(0)} + z) + gy_{\text{вх}}. \end{aligned}$$

Після зведення подібних складників у сформованій системі рівнянь отримаємо:

$$\begin{aligned} Az + F(z) &= ay_{\text{вх}}, \\ v + c^T z + gy_{\text{вх}} & \end{aligned} \quad (2)$$

де  $F(z) = f(x^{(0)} + z) - f(x^{(0)})$ .

Розглянемо процес розв'язку системи рівнянь (2) за допомогою методу Ньютона. Якщо за нульове наближення прийняти  $z^{(0)} = 0$ , то

$$z^{(1)} = [A + F'(0)]^{-1} ay_{\text{вх}}(t), \quad v^{(1)} = [c^T [A + F'(0)]^{-1} a + g] y_{\text{вх}}(t). \quad (3)$$

З рівняння (3) можна знайти коефіцієнт підсилення  $K_0$ , який за визначенням рівний:

$$K_0 = c^T (A + F'(0))^{-1} a + g.$$

Для оцінки коефіцієнта нелінійних спотворень необхідно знайти друге наближення для системи рівнянь (2), застосувавши модифікований метод Ньютона. Тоді

$$z^{(2)} = [A + F'(0)]^{-1} a y_{\text{вх}}(t) - [A + F'(0)]^{-1} [A(A + F'(0))^{-1} a y_{\text{вх}}(t) + F(z^{(1)}) - a y_{\text{вх}}(t)].$$

Шляхом перетворення цього виразу отримаємо:

$$z^{(2)} = [A + F'(0)]^{-1} a y_{\text{вх}}(t) + [A + F'(0)]^{-1} F'(0) [A + F'(0)]^{-1} a y_{\text{вх}}(t) - [A + F'(0)]^{-1} F(z^{(1)}).$$

Якщо врахувати структуру функції то можна записати наступне співвідношення:

$$F(z^{(1)}) = F'(0)z^{(1)} + \varphi(z^{(1)}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} z^{(2)} &= [A + F'(0)]^{-1} a y_{\text{вх}} + [A + F'(0)]^{-1} \varphi(z^{(1)}); \\ v^{(2)} &= K_0 y_{\text{вх}}(t) + c^T [A + F'(0)]^{-1} \varphi(z^{(1)}). \end{aligned} \quad (4)$$

За визначенням  $\varphi(z) = f(x^{(0)} + z) - f(x^{(0)}) - f'(x^{(0)})z$ , де  $f' = \text{diag}(f'_1(x_1), f'_2(x_2), \dots, f'_n(x_n))^T$  -діагональна матриця розміром  $n \times n$ ,  $T$  - знак транспонування.

Якщо прийняти, що  $c^T [A + F'(0)]^{-1} = l^T$ , то

$$K_0 = \sum_{s=1}^n l_s a_s + g$$

і, відповідно, формулу (4) можна представити у вигляді:

$$v^{(2)} = K_0 y_{\text{вх}}(t) + \sum_{s=1}^n l_s \varphi_s(z^{(1)}).$$

Тоді задача мінімізації спотворень вихідного гармонійного періодичного сигналу з заданим коефіцієнтом підсилення формулюється наступним чином: мінімізувати функцію

$$W = \sum_{s=1}^n l_s \varphi_s(z^{(1)}),$$

де  $z^{(1)} = (r_1 y_{\text{вх}}(t), r_2 y_{\text{вх}}(t), \dots, r_n y_{\text{вх}}(t), )^T$ ;  $r = [A + F'(0)]^{-1} a$

за умови

$$\sum_{s=1}^n l_s a_s + g \geq K_0.$$

Якщо враховувати тільки квадратичні члени в  $\varphi(z)$ , тобто

$$\varphi(z) = (\alpha_1 z_1^2, \alpha_2 z_2^2, \dots, \alpha_n z_n^2),$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  -відомі постійні величини, то

$$W = \sum_{s=1}^n l_s \alpha_s^2 r_s^2 Y^2 \cos^2 \omega t = Y^2 \cos^2 \omega t \sum_{s=1}^n l_s \alpha_s^2 r_s^2.$$

Тоді задачу мінімізації спотворень гармонійного періодичного сигналу електротехнічної системи можна сформулювати як:

мінімізувати

$$\tilde{W} = \sum_{s=1}^n l_s \alpha_s^2 r_s^2$$

за умови

$$\sum_{s=1}^n l_s a_s + g \geq K_0,$$

де  $l = [(A + F'(0))^{-1}]^T c$ ;  $r = (A + F'(0))^{-1} a$ .

Таку задачу можна розв'язувати за допомогою методів нелінійного програмування.

**Висновок.** Розроблено методику для підвищення ефективності процесу оптимізації спотворень гармонійного періодичного сигналу електротехнічних систем. Для їх опису запропоновано математичну модель у вигляді системи нелінійних рівнянь, а параметром оптимізації обрано коефіцієнт гармонік. Шляхом перетворень такої системи рівнянь і введення відповідних обмежень сформульовано оптимізаційну задачу, яку можна розв'язати за допомогою існуючих оптимізаційних методів.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Shichman H. Integration system of a nonlinear transient network-analysis program // IEEE Trans.: V. CT-17. – 1970. – No. 3.
2. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1983. – 598 с.
3. Богданович Б. М. Нелинейные искажения в приемно-усилительных устройствах. – М.: Связь, 1980. – 280 с.
4. Мильштейн В. Н. Общий метод оценки малых изменений в электрических цепях с помощью эквивалентных схем // Электричество. – 1950. – №5. – С. 47-54.
5. Калахан Д. Методы машинного расчета электронных схем. – М.: Мир, 1970. – 344 с.

6. Чуа Л.О., Пен-Мин-Лин. Машинный анализ электронных схем. – М.: Энергия, 1980. – 640 с.
7. Заячук І. М., Кіт Л.М. Про можливі шляхи підвищення ефективності процесу проектування радіоелектронних схем // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2005. – Вип. 1. –С. 153–158.
8. Заячук І. М., Кіт Л.М. Оптимізація радіоелектронних схем за коефіцієнтом нелінійних спотворень // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2005. – Вип. 2. –С. 167–171.
9. Заячук И. М., Синицкий Л. А. О расчете коэффициента нелинейных искажений электронных схем // Теоретическая электротехника: Изд-во ЛГУ, 1982. Вып. 33. – С. 129–134.
10. Благітко Б.Я., Заячук І. М., Кіт Л.М. Похибка розрахунку характеристик гармонійного сигналу // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. –С. 48–53.

### REFERENCES

1. Shichman H. (1970). Integration system of a nonlinear transient network-analysis program // IEEE Trans.: V. CT-17. — No. 3. (in English)
2. Himmel'blau D. (1983). Prikladnoe nelinejnoe programmirovanie. – M.: Mir– 598 s. (in Russian)
3. Bogdanovich B. M. (1980). Nelinejnye iskazhenija v priemno-usilitel'nyh ustrojstvah. – M.: Svjaz'– 280 s. (in Russian)
4. Mil'shtejn V. N. (1950). Obshhij metod ocenki malyh izmenenij v jelektricheskikh cepjah s pomoshh'ju jekvivalentnyh shem // Jelektrichestvo. — №5. – S. 47-54. (in Russian)
5. Kalahan D. (1970). Metody mashinnogo rascheta jelektronnyh shem. – M.: Mir,– 344 s. (in Russian)
6. Chua L.O., Pen-Myn-Lyn. (1980). Mashynnyi analiz elektronnykh skhem. – M.: Enerhyia,– 640 s. (in Russian)
7. Zaiachuk I. M., Kit L.M. (2005). Pro mozhlyvi shliakhy pidvyshchennia efektyvnosti protsesu proektuvannia radioelektronnykh skhem // Fyzyko-matematyчне modeliuвання ta informatsiini tekhnolohii. — Vyp. 1. –S. 153–158. (in Ukrainian)
8. Zaiachuk I. M., Kit L.M. (2005). Optyimizatsiia radioelektronnykh skhem za koefitsiientom neliniinykh spotvoren // Fyzyko-matematyчне modeliuвання ta informatsiini tekhnolohii. — Vyp. 2. –S. 167–171. (in Ukrainian)
9. Zajachuk I. M., Sinickij L. A. (1982). O raschete kojefficienta nelinejnyh iskazhenij jelektronnyh shem // Teoreti-cheskaja jelektrotehnika: Izd-vo LGU, Vyp. 33. – С. 129–134. (in Russian)
10. Blahitko B.Ia., Zaiachuk I. M., Kit L.M. (2010). Pokhybka rozrakhunku kharakterystyk harmoniinoho syhnalu // Fyzyko-matematyчне modeliuвання ta informatsiini tekhnolohii. — Vyp. 12. –S. 48–53. (in Ukrainian)

---

**DOI 10.32403/2411-9210-2019-1-41-80-85****CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF NONLINEAR ELECTRICAL SYSTEM FOR THE OPTIMIZATION OF THE HARMONIAL OUTPUT SIGNAL DISTORTION**

I. M. Zayachuk

*Center of Mathematic Modelling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine  
15, Dudayeva St., Lviv, 79005, Ukraine  
igorzajach@gmail.com*

*To simplify the process of designing nonlinear electrical systems in the time domain, a correlation between the selected criterion has been established characterizing the distortion of the output harmonic signal (harmonic ratio) with the system parameters. An effective technique for optimizing the distortion of the output harmonic signal for an existing model of a nonlinear electrical system in the time domain has been suggested. The target function and the boundary conditions have been formed analytically. We suggest using the existing methods of nonlinear programming to solve the optimization problem.*

**Keywords:** *nonlinear electrical systems, harmonic periodic signal, harmonic signal distortion, distortion optimization, target function, harmonic ratio, gain, electric circuit.*

*Стаття надійшла до редакції 12.02.2019*

*Received 12.02.2019*